9. Задачи по теории вероятностей (13-14.12.07)

1. Пусть ξ_n — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых принимает значение 1 с вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1-p$. Найти предел $\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(\xi_1|\xi_1+\dots+\xi_n)$, если он существует в каком-либо смысле.

2. Пусть p — вероятность успеха в каждом из n испытаний Бернулли и q_n — вероятность того, что число успехов в этих испытаниях четно. Найти производящую функцию последовательности $\{q_n\}$.

3. Пусть ξ_n — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых принимает значение 1 с вероятностью p и значение -1 с вероятностью $1-p$. Найти вероятность того, что найдется n, при котором $\sum_{i=1}^n \xi_i = k$.

4. Пусть $F(x)$, $F_n(x)$ — функции распределения. Доказать, что если F непрерывна и $F_n(x)\to F(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}$, то эта сходимость равномерна.

5. Пусть $F(x)$, $F_n(x)$ — те же, что и в предыдущей задаче. Доказать, что $F_n\to F$ в основном (т.е. в точках непрерывности функции F) в том и только том случае, когда найдется всюду плотное множество, во всех точках которого $F_n\to F$.

6. Пусть $F(x)$, $F_n(x)$ — те же, что и в предыдущей задаче, и $F_n\to F$ в основном. Доказать, что если g — непрерывная ограниченная функция на $\mathbb{R}$, и a, b — точки непрерывности функции F, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)F_n(dx) = \int_a^b g(x)F(dx).$$

7. Доказать, что в условиях предыдущей задачи

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)F_n(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F(dx).$$

8. Доказать, что сходимость по вероятности $\xi_n\to\xi$, где $\xi = const$ почти наверное, равносильна сходимости в основном (см. задачу 5) функций распределения $F_{\xi_n}\to F_\xi$.

9. Вычислить характеристические функции нормального, пуассоновского, равномерного и биномиального распределений.

10. Доказать, что вещественная часть всякой характеристической функции есть также характеристическая функция, а для мнимой части это не так.

11. Пусть φ_ξ — характеристическая функция случайной величины ξ. Предположим, что $\varphi_\xi(t_0)=1$ при некотором $t_0\neq 0$. Какое распределение может иметь ξ? Тот же вопрос при $|\varphi_\xi(t_0)|=1$.

12. Пусть ξ,η — независимые одинаково распределенные случайные величины. Доказать, что если $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$ независимы, то ξ,η имеют нормальное распределение (теорема Бернштейна).

13. Докажите, что для произвольной случайной величины ξ с распределением μ_ξ и характеристической функцией $\varphi_\xi(t)$ выполняется равенство

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi_\xi(t)|^2dt=\sum_x(\mu_\xi(x))^2,$$

в котором суммирование ведется по всем $x\in\mathbb{R}$, для которых $\mu_\xi(x)>0$.

14. Предположим, что проводится n независимых испытаний с вероятностью p_n успеха в каждом. Пусть S_n — общее число успехов в n испытаниях и φ_n — характеристическая функция этой случайной величины. Найти $\lim_{n\to\infty}\varphi_n$ в предположении, что $np_n\to\lambda>0$.

15. Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots$ — независимые случайные величины с $\mathbf{M}\xi_n=0$ и $\sup_n\mathbf{D}\xi_n<\infty$. Найти предел при $n\to\infty$ характеристической функции случайной величины $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i$.

16. Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $S_n=\sum_{i=1}^n\xi_i$. Доказать, что $\mathbf{P}(|S_n|<c)\to 0$ при $n\to\infty$ и всех $c>0$.

17. Пусть ξ_n и S_n — те же, что и в предыдущей задаче. Доказать, что если $\mathbf{M}\xi_n=0$ и $\mathbf{D}\xi_n<\infty$, то $\overline{\lim}_{n\to\infty}n^{-1/2}S_n=\infty$ почти наверное.

18. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k:0<k<(n+n^{1/3})/2}C_n^k.$$

19. Пусть ξ - неотрицательная случайная величина с плотностью распределения $p_\xi(x)$ и характеристической функцией $\varphi_\xi(t)$. Доказать, что если $p_\xi(x)$ монотонно убывает при $x>0$, то $\varphi_\xi(t)$ нигде не обращается в нуль.

20. Найти плотность распределения, характеристическая функция которого имеет вид $\varphi(t)=(1-|t|)I_{[-1,1]}(t)$. Доказать, что последовательность независимых случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots$, имеющих такое распределение, не удовлетворяет ни закону больших чисел, ни центральной предельной теореме. Выяснить, имеет ли предел функция распределения случайной величины $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i$.