Экзамен (21.01.08)

1. Найти вероятность того, что в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $p \in [0,1]$ число успехов будет четным, а также предел этой вероятности при $n \to \infty$.

2. Пусть ξ, η — независимые случайные величины, имеющие показательное распределенные с параметром λ. Найти вероятность того, что уравнение $x^2 + \xi x + \eta^2 = 0$ имеет действительные корни.

3. Найти предел $\lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{N(n,x)} C_n^k$, где $N(n,x) = \left[\frac{n+x\sqrt{n}}{2}\right]$.

4. Построить пример таких ненулевых случайных величин ξ и η, что ξ и $\xi + \eta$ одинаково распределены.

5. Пусть $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}^0$ — два семейства событий и $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — порожденные ими σ-алгебры. Построить пример, в котором $\mathcal{A}^0$ и $\mathcal{B}^0$ независимы, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — нет.

6. Доказать, что если случайные величины X, Y, Z независимы и равномерно распределены на отрезке $[0,1]$, то так же распределена и случайная величина $(XY)^Z$.

7. Пусть $F(x,y) = 1$ при $x, y \geq 0$, $x + y \geq 1$ и $F(x,y) = 0$ во всех остальных точках $(x,y) \in \mathbb{R}$. Является ли F функцией распределения какого-либо двумерного случайного вектора?

8. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, каждая из которых имеет нормальное распределение с нулевым средним. Доказать, что для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq n}(\xi_1 + \cdots + \xi_k) > x\right) \leq 2\mathbf{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_n > x).$$

9. Известно, что дисперсия случайной величины ξ, принимающей значения на отрезке $[a,b]$, равна $(b-a)^2/4$. Найти распределение ξ.

10. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с целочисленными значениями, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ и $X_n = \left\{\frac{S_n}{2}\right\} = \frac{S_n}{2} - \left[\frac{S_n}{2}\right]$ — дробная часть $S_n/2$. В предположении, что $\mathbf{P}(\xi_n = 1)\mathbf{P}(\xi_n = 2) > 0$, найти предел при $n \to \infty$ распределения случайной величины X_n.

11. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения F_ξ и характеристической функцией φ_ξ. Доказать, что предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi_\xi|^2 dt$$

существует и равен сумме квадратов скачков функции F_ξ.

12. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — однородная цепь Маркова с тремя состояниями, a, b, c, и в ее матрице переходных веротностей все элементы, кроме диагональных, равны $1/2$. Пусть η_n — число тех $i \in \{1, \ldots, n\}$, при которых $\xi_i = c$. Найти предел $\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}\left(\frac{\eta_n}{n}\right)$. Существует ли конечный предел $\lim_{n\to\infty}(\mathbf{D}\eta_n)/n$?

13. Доказать, что если для последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ при всяком $\varepsilon > 0$ выполняется условие $\sum_n \mathbf{P}(|\xi_n| > \varepsilon)$, то $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ с вероятностью 1.