# Тэта-функции

7 сентября 2007 года

## Семинар 1

**Задача** 1. Докажите, что сумма вычетов эллиптической функции по всем полюсам в параллелограмме периодов равна нулю.

**Задача** 2. Зафиксируем $c \in \mathbb{C} \cup \infty$. Докажите, что для произвольной эллиптической функции $f$ сумма прообразов $f^{-1}c$ (с учётом кратностей) не зависит от $c$ по модулю периодов.

**Задача** 3. Определим функцию Вейерштрасса

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L'} \left[ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right].$$

Докажите, что ряд в правой части сходится равномерно и абсолютно на каждом компакте, не содержащем точек решётки. Проверьте эллиптичность $\wp(z)$.

**Задача** 4. При каких $z$, $w$ выполняется $\wp(z) = \wp(w)$?

**Задача** 5. Решите уравнение $\wp'(z) = 0$.

**Задача** 6. Докажите, что функция Вейерштрасса удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3),$$

где $e_1 = \wp(\frac{\omega_1}{2})$, $e_2 = \wp(\frac{\omega_2}{2})$, $e_3 = \wp(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$.

**Задача** 7. Докажите, что функция Вейерштрасса удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3,$$

где

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in L'} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \in L'} \frac{1}{\omega^6}.$$

**Задача** 8. Докажите теорему сложения: при $z_1$, $z_2$ таких, что $\wp(z_1) \neq \wp(z_2)$, выполняется равенство

$$\wp(z_1 + z_2) = -\wp(z_1) - \wp(z_2) + \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)} \right)^2.$$

**Задача** 9. Докажите, что любую эллиптическую функцию можно представить в виде $R_1(\wp(z)) + \wp'(z) R_2(\wp(z))$, где $R_1$, $R_2$ – некоторые рациональные функции.