Тэта-функции

16 ноября 2007 года

Семинар 11

Задача 1. Найдите условие, при котором векторные поля

$$X_f = P(f, f', \dots, f^{(n)}),\ Y_f = Q(f, f', \dots, f^{(n)})$$

коммутируют.

Задача 2. Введите на пространстве $R\{D\}$ формальных рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{d} a_n(x) D^n$$

структуру ассоциативного кольца. Проверьте, что подмножество вида $1 + a_1 D^{-1} + a_2 D^{-2} + \dots$ образует группу. Обозначим её G. Опишите алгебру Ли $Lie(G)$.

Задача 3. Вычислите первые три члена разложения $(D^2+q)^{-1}$.

Задача 4. Проверьте, что при любом $d \geq 1$ для каждого элемента вида $D^d + a_1 D^{d-1} + \dots$ существует единственный корень степени d вида $D + b_1 + b_2 D^{-1} + \dots$.

Задача 5. Рассмотрим разложение

$$(D^2+q)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_n(q, q', \dots) D - \frac{g_n(q, q', \dots)}{2} \right) (D^2+q)^{-n},$$

$g_0 = 0$, $f_0 = 1$. Докажите, что

$$g_n = f_n', \quad f_{n+1}' = f_n' q + \frac{1}{2} f_n q' + \frac{g_n''}{4}.$$

Задача 6. Докажите, что формула $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}(XY)$ определяет симметричную билинейную форму на операторах с компактным носителем $R_2\{D\}$, где для $X = \sum a_i D^i$

$$\mathrm{tr} X = \int_{-\infty}^{\infty} a_{-1}(x).$$

Задача 7. Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли. Для $f \in \mathfrak{g}^*$ определите векторное поле V_f на $\mathfrak{g}^*$. Постройте скобку Кириллова-Костанта.