**Тэта-функции**

23 ноября 2007 года

**Семинар 12**

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли операторов вида $\sum_{i>0} a_i(x)D^{-i}$. Напомним, что $\mathrm{tr}$ определяет вложение $\imath : R_2[D] \to \mathfrak{g}^*$. Будем обозначать соответствующее спаривание скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

**Задача** 1. Пусть $P(x, \ldots, a_k^{(l)}, \ldots)$ – бесконечно дифференцируемая функция, зависящая от конечного числа параметров $a_k^{(l)}$, $k, l \geq 0$. Рассмотрим

$$X = \sum_{k=0}^{d} a_k(x)D^k,\ Y = \sum_{k=0}^{d} b_k(x)D^k.$$

Определим $\phi_P : R_2[D] \to \mathbb{C}$:

$$\phi_P(X) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, \ldots, a_k^{(l)}(x), \ldots)dx.$$

Докажите, что

$$\frac{d}{d\varepsilon}\phi_P(X + \varepsilon Y) = \left\langle Y, \sum_k D^{-k}\left(\sum_l (-1)^l \left(\frac{d}{dx}\right)^l \frac{\partial P}{\partial a_k^{(l)}}\right)\right\rangle.$$

Таким образом, $(d\phi_P)_X \in \mathfrak{g}$.

**Задача** 2. Докажите, что $ad_Y^*(X) = [Y, X]_+$, $X \in R_2[D]$, $Y \in \mathfrak{g}$.

**Задача** 3. Пусть $M = \{D^2 + q\} \in R_2[D]$. Докажите, что косимплектическая структура с $R_2[D]$ опускается на $M$.

**Задача** 4. Пусть $P$ зависит от $x, q, q', \ldots, q^{(n)}$. Определим

$$\frac{\delta P}{\delta q} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{\partial P}{\partial q^{(k)}}.$$

Докажите, что

$$(d\phi_P)_{D^2+q} = D^{-1}\frac{\delta P}{\delta q},\ \{\phi_P, \phi_Q\}_{D^2+q} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta P'}{\delta q}\frac{\delta Q}{\delta q}dx,$$

$$(V_{\phi_P})_{D^2+q} = 2\left(\frac{\delta P}{\delta q}\right)'.$$

Определим

$$H_n = \frac{1}{n+1/2}\mathrm{tr}((D^2+q)^{n+1/2}).$$

**Задача** 5. Проверьте, что $H_n = \phi_{\frac{f_{n+1}}{n+1/2}}$.

**Задача** 6. Докажите, что

$$\frac{\delta f_{n+1}}{\delta q} = (n+1/2)f_n,\ (dH_n)_{D^2+q} = D^{-1}f_n.$$

**Задача** 7. Докажите, что $\{H_n, H_m\} = 0$, $(V_{H_n})_{D^2+q} = 2g_n$. Вычислите явно $V_{H_1}$, $V_{H_2}$, $V_{H_3}$.

Пусть $C$ – гиперэллиптическая кривая. Пусть $t$ – касательный вектор к $C$ в бесконечности, $z_i = \int^P \omega_i$ – координаты на $Jac(C)$,

$$e_i = \langle \omega_i(\infty), t \rangle, \quad D_\infty = \sum e_i \partial/\partial z_i.$$

Определим рациональную функцию на якобиане $\rho(\mathbf{z}) = D_\infty^2 \ln \theta(\mathbf{z})$.

**Задача** $8^*$. Определим отображение

$$Jac(C) \setminus \Theta \to M, \ \mathbf{z} \mapsto D^2 + 2\rho(\mathbf{z} + x\mathbf{e}).$$

Это вложение и потоки $V_{H_n}$ касательны к его образу.