Тэта-функции

14 сентября 2007 года

Семинар 2

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{H}$. Определим тэта-функцию

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(2\pi i n z + \pi i n^2 \tau).$$

Задача 1. Докажите, что ряд для $\theta(z,\tau)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$.

Задача 2. Вычислите $\theta(z + a\tau + b, \tau)$.

Задача 3. Докажите, что функция $\theta(x, it)$ ($x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(x,it) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(x,it).$$

Для $a, b \in \mathbb{R}$ определим

$$(S_b f)(z) = f(z+b), \quad (T_a f)(z) = \exp(\pi i a^2 \tau + 2\pi i a z) f(z + a\tau).$$

Задача 4. Докажите, что группа Γ, порождённая операторами S_a, T_b изоморфна группе $S^1\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ с умножением

$$(\lambda, a, b)(\lambda_1, a_1, b_1) = (\lambda\lambda_1 \exp(2\pi i b a_1), a + a_1, b + b_1).$$

Задача 5. Докажите, что $\Gamma_l = (1, la, lb)$ является подгруппой Γ при любом натуральном l. Опишите пространство инвариантных целых функций относительно Γ_1.

Определим пространство V_l, состоящее из всех целых функций, инвариантных относительно Γ_l.

Задача 6. Найдите размерность V_l.

Задача 7. Докажите, что $S_{1/l}$, $T_{1/l}$ коммутируют с Γ_l.

Задача 8. Опишите группу G_l, порождённую операторами $S_{1/l}$, $T_{1/l}$.

Задача 9. Постройте естественное представление группы G_l в пространстве V_l. Докажите, что это представление неприводимо.

Определим $\theta_{a,b}(z,\tau) = S_b T_a \theta(z,\tau)$, $a, b \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}$.

Задача 10. Докажите, что функции

$$\theta_{a,b}, \quad a, b = 0, \frac{1}{l}, \ldots, \frac{l-1}{l},$$

составляют базис в пространстве V_l. Напишите действие операторов S_a, T_b ($a, b \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}$) в этом базисе.