Тэта-функции

21 сентября 2007 года

Семинар 3

Задача 1. Найдите нули функций $\theta_{a,b}(z,\tau)$, $a,b \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}$. Найдите количество нулей (с учётом кратностей) у произвольной функции из V_l.

Определим $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$. Пусть θ_i, $0 \le i \le l^2 - 1$ – базис из тэта-функций пространства V_l.
Задача 2. Докажите, что отображение

$$\phi_l : E_\tau \to \mathbb{P}^{l^2-1}, \quad z \mapsto (\dots, \theta_i(lz,\tau), \dots)$$

корректно определено.
Задача 3. Докажите, что фактор группы G_l по центру естественным образом действует на E_τ и на $\mathbb{P}^{l^2-1}$. Докажите, что отображение ϕ_l эквивариантно.
Задача 4. Докажите, что отображение ϕ_l является вложением.
Задача 5. Проверьте, что любая мероморфная функция на E_τ может быть записана в виде

$$\mathrm{const} \cdot \prod_{1 \le i \le n} \frac{\theta(z-a_i)}{\theta(z-b_i)}.$$

Задача 6. Найдите связь между $\wp(z)$ и $(\ln \theta_{1,1}(z))''$.
Задача 7. При каких значениях λ_i выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\ln \theta(z-a_i))'$$

определяет мероморфную функцию на торе? Найдите полюса и вычеты этой функции.
Задача 8*. Докажите, что образ ϕ_2 описывается уравнениями

$$\theta_{0,0}(z)^2\theta_{0,0}(0)^2 = \theta_{0,1}(z)^2\theta_{0,1}(0)^2 + \theta_{1,0}(z)^2\theta_{1,0}(0)^2,$$
$$\theta_{1,1}(z)^2\theta_{0,0}(0)^2 = \theta_{0,1}(z)^2\theta_{1,0}(0)^2 - \theta_{1,0}(z)^2\theta_{0,1}(0)^2.$$