Тэта-функции

28 сентября 2007 года

Семинар 4

Задача 1. Пусть $q = \exp(\pi i \tau)$. Найдите первые 4 члена в разложении функций $\theta_{00}(0,\tau)$, $\theta_{01}(0,\tau)$, $\theta_{10}(0,\tau)$, $\theta_{11}(0,\tau)$, $(\theta_{11}(z,\tau))'_{z=0}$.

Задача 2. Проверьте первые три члена в разложении по q формулы Якоби

$$\theta_{11}(0,\tau)' = -\pi\theta_{00}(0,\tau)\theta_{01}(0,\tau)\theta_{10}(0,\tau).$$

Задача 3. Докажите, что бесконечное произведение

$$p(z,\tau) = \prod_{m\geq 0}[1+\exp(\pi i(2m+1)\tau - 2\pi i z)][1+\exp(\pi i(2m+1)\tau + 2\pi i z)]$$

сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$.

Задача 4. Докажите, что $\theta(z,\tau) = p(z,\tau)c(\tau)$, где $c(\tau)$ – нигде не равная нулю голоморфная функция.

Задача 5. Получите разложения, аналогичные $\theta(z,\tau) = p(z,\tau)c(\tau)$ для функций $\theta_{00}(0,\tau)$, $\theta_{01}(0,\tau)$, $\theta_{10}(0,\tau)$, $\theta_{11}(0,\tau)'$.

Задача 6. Докажите, что

$$c(\tau) = \prod_{n\in\mathbb{N}}[1-\exp(2\pi i n\tau)].$$

Задача 7. Докажите тождества

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2} = \prod_{m\in\mathbb{N}}(1-q^{2m})\prod_{m\geq 0}(1+q^{2m+1})^2,$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m q^{m^2} = \prod_{m\in\mathbb{N}}(1-q^{2m})\prod_{m\geq 0}(1-q^{2m+1})^2.$$