Тэта-функции

5 октября 2007 года

Семинар 5

Задача 1. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$, ab, cd – чётные. Докажите, что функция

$$\Psi(y, \tau) = \exp(\pi i c(c\tau + d)y^2)\theta((c\tau + d)y, \tau)$$

инвариантна относительно преобразования $y \to y + 1$.

Задача 2. Проверьте, что

$$\Psi\left(y + \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \tau\right) = \exp\left(-\pi i \frac{a\tau + b}{c\tau + d} - 2\pi i y\right)\Psi(y, \tau).$$

Задача 3. Докажите, что

$$\theta(z, \tau) = \phi(\tau)\exp\left(-\frac{\pi i c z^2}{c\tau + d}\right)\theta\left(\frac{z}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

для некоторой функции $\phi(\tau)$.

Задача 4. Докажите, что

$$\phi(\tau) = \int_0^1 \exp(\pi i c(c\tau + d)y^2)\theta((c\tau + d)y, \tau)dy.$$

Задача 5. Считая $c > 0$, покажите, что интеграл в предыдущей задаче равен

$$c^{-1/2} i^{1/2} (c\tau + d)^{-1/2} \sum_{1 \le n \le c} \exp(-\pi i n^2 d/c).$$

Задача 6*. Докажите, что

$$\left(c^{-1/2} \sum_{1 \le n \le c} \exp(-\pi i n^2 d/c)\right)^8 = 1.$$

Задача 7. Пусть a, b, c, d как в Задаче 1. Тогда для некоторого α ($\alpha^8 = 1$) выполняется

$$\theta\left(\frac{z}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \alpha(c\tau + d)^{1/2}\exp\left(\frac{\pi i c z^2}{c\tau + d}\right)\theta(z, \tau).$$