Тэта-функции

12 октября 2007 года

Семинар 6

Задача 0. Склейте кривую C рода g из многоугольника с $4g$ сторонами. Постройте стандартные циклы A_i, B_j, найдите их индексы пересечения.

Задача 1. Рассмотрим подмножество в $\mathbb{C}^2$ вида $s^2 = f(t)$,

$$f(t) = (t - a_1) \dots (t - a_{2g+1}),$$

a_i – попарно различные комплексные числа. Добавьте к этому подмножеству "бесконечные точки" так, чтобы получилась кривая рода g. Такие кривые называются гиперэллиптическими.

Задача 2. Проверьте, что C гладкая.

Задача 3. Докажите, что пространство голоморфных форм на C имеет вид

$$\omega = \frac{P(t)dt}{s},$$

где $P(t)$ – полином, степени не выше $g - 1$. Как следствие

$$\dim \Gamma(C, \Omega^1) = g.$$

Задача 4. Докажите, что для произвольной кривой рода 0 или 1 пространство голоморфных 1-форм g-мерно.

Задача 5*. Докажите утверждение предыдущей задачи для общего рода.

Задача 6. Докажите билинейные соотношения Римана: для любых голоморфных 1-форм ω, η выполняется

$$\sum_{i=1}^{g} \int_{A_i} \omega \int_{B_i} \eta - \sum_{i=1}^{g} \int_{B_i} \omega \int_{A_i} \eta = 0;$$

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{i=1}^{g} \overline{\int_{A_i} \omega} \int_{B_i} \omega \right) > 0.$$

Задача 7. Докажите, что образ отображения

$$\Gamma(C, \Omega^1) \to H^1(C, \mathbb{C}),\ \omega \mapsto \left\{ \sigma \to \int_{\sigma} \omega \right\}$$

является изотропным подпространством относительно $\cup$-умножения.

Задача 8. Докажите, что в пространстве $\Gamma(C, \Omega^1)$ можно построить такой базис ω_i, что $\int_{A_i} \omega_j = \delta_{ij}$. Определим $\Omega_{ij} = \int_{B_i} \omega_j$. Докажите, что Ω симметрична и её мнимая часть положительно определена.