Тэта-функции

19 октября 2007 года

Семинар 7

Пусть $g > 0$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_g)$, Ω – симметричная комплексная $g \times g$-матрица, $\mathrm{Im}\Omega > 0$. Определим

$$\theta(\mathbf{z}, \Omega) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i \mathbf{n} \Omega \mathbf{n} + 2\pi i \mathbf{n} \mathbf{z}).$$

Задача 1. Докажите, что ряд для θ сходится абсолютно и равномерно по z и Ω на каждом подмножестве вида

$$|\mathrm{Im} z_i| < c_1,\ 1 \le i \le g, \quad \mathrm{Im}\Omega \ge c_2 I_g.$$

Задача 2. Определим

$$\theta(l, Q) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \exp(Q(\mathbf{n}) + l(\mathbf{n})),$$

где l, Q – комплекснозначные линейная и квадратичная функции. Докажите, что сходимость этого ряда равносильна существованию $\mathbf{z}$, Ω ($\mathrm{Im}\Omega > 0$) таких, что $\theta(l, Q) = \theta(\mathbf{z}, \Omega)$.

Задача 3. Определим $L_\Omega = \mathbb{Z}^g + \Omega \mathbb{Z}^g$. Найдите множитель, на который умножается тэта-функция при сдвиге $\mathbf{z} \to \mathbf{z} + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in L_\Omega$. Докажите, что все функции с такими свойствами квазипериодичности пропорциональны $\theta(\mathbf{z}, \Omega)$.

Задача 4. Определим тэта-функции с характеристиками

$$\theta\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}(\mathbf{z}, \Omega) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i (\mathbf{n} + \mathbf{a}) \Omega (\mathbf{n} + \mathbf{a}) + 2\pi i (\mathbf{n} + \mathbf{a})(\mathbf{z} + \mathbf{b})).$$

Докажите, что

$$\theta\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}(\mathbf{z}, \Omega) = \exp(\pi i \mathbf{a} \Omega \mathbf{a} + 2\pi i \mathbf{a}(\mathbf{z} + \mathbf{b}))\theta(\mathbf{z} + \Omega \mathbf{a} + \mathbf{b}, \Omega).$$

Задача 5. Найдите свойства квазипериодичности тэта-функций с характеристиками относительно L_Ω.