Тэта-функции

26 октября 2007 года

Семинар 8

Задача 1. Зафиксируем $l \in \mathbb{N}$. Найдите размерность и постройте какой-нибудь базис пространства функций $f(\mathbf{z})$ таких, что

$$f(\mathbf{z} + \Omega\mathbf{m} + \mathbf{n}) = \exp(-\pi i l \mathbf{m}\Omega\mathbf{m} - 2\pi i l \mathbf{z}\mathbf{m}) f(\mathbf{z})$$

для всех $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g$.

Определим $\alpha_\Omega : \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g \to \mathbb{C}^g$, $e : \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g} \to \mathbb{C} \setminus 0$ по формулам

$$\alpha_\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \Omega\mathbf{a} + \mathbf{b}, \;\; e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp(2\pi i(\mathbf{x}_1\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\mathbf{x}_2)).$$

Задача 2. Для решётки $L \subset \mathbb{Q}^{2g}$ определим

$$L^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^{2g} : \; e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 \; \forall \mathbf{y} \in L\}.$$

Докажите, что $L^\perp$ – решётка. Пусть L – решётка индекса s в $\mathbb{Z}^{2g}$. Тогда $\mathbb{Z}^{2g} \subset L^\perp$ и $\alpha_\Omega(L) \subset L_\Omega = \alpha_\Omega(\mathbb{Z}^{2g})$ также имеют индекс s.

Задача 3. Пусть $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ – представители смежных классов $L^\perp/\mathbb{Z}^{2g}$. Рассмотрим подмножество $B_\Omega(L) \subset \mathbb{C}^g/\alpha_\Omega(L)$:

$$B_\Omega(L) = \{z \in \mathbb{C}^g : \; \theta\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i \\ \mathbf{b}_i\end{bmatrix}(z, \Omega) = 0, 1 \le i \le s\}/\alpha_\Omega(L).$$

Постройте голоморфное отображение

$$\phi_L : [\mathbb{C}^g/\alpha_\Omega(L)] \setminus B_\Omega(L) \to \mathbb{P}^{s-1}.$$

Задача 4. Пусть $f(\mathbf{z})$ – голоморфная функция такая, что

$$f(\mathbf{z} + \Omega\mathbf{a}' + \mathbf{b}') = \exp(-\pi i \mathbf{a}'\Omega\mathbf{a}' - 2\pi i \mathbf{a}'\mathbf{z}) f(\mathbf{z})$$

для всех $(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \in L$. Тогда $f(\mathbf{z})$ является линейной комбинацией функций $\theta\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i \\ \mathbf{b}_i\end{bmatrix}(z, \Omega)$, $1 \le i \le s$.

Теорема. Пусть $L \subset \mathbb{Z}^{2g}$ – решётка индекса s и $L \subset r \cdot L^\perp$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Тогда

1). если $r \ge 2$, то $B_\Omega(l) = \emptyset$.

2). если $r \ge 3$, то ϕ_L – вложение.

Задача 5. Докажите, что торы $\mathbb{C}^g/\alpha_\Omega(L)$ и $\mathbb{C}^g/\alpha_\Omega(nL)$ изоморфны.

Задача 6. Пусть X – компактная риманова поверхность. Постройте вложение $H_1(X, \mathbb{Z}) \to L_\Omega$, где Ω – матрица периодов X.