Тэта-функции

2 ноября 2007 года

Семинар 9

Задача 1. Пусть X – риманова поверхность. Постройте отображение I из множества нульмерных циклов на X степени ноль в $Jac(X) = \mathbb{C}^g/L_\Omega$. Докажите, что образ дивизора нулей и полюсов любой мероморфной функции на X при отображении I равен нулю.

Задача 2. *Теорема Римана.* Докажите, что функция

$$f(P) = \theta\left(\mathbf{z} + \int\limits_{P_0}^{P} \omega, \Omega\right)$$

либо обращается тождественно в ноль, либо имеет ровно g нулей $Q_1, \ldots, Q_g$ таких, что

$$\mathbf{z} - \triangle + \sum_{i=1}^{g} \int\limits_{P_0}^{Q_i} \omega \in L_\Omega$$

для некоторого фиксированного вектора $\triangle$.

Задача 3. Докажите, что $Symm^n X$ является многообразием. Постройте отображение $I_n : Symm^n X \to Jac(X)$.

Задача 4. Докажите, что I_g сюръективно.

Задача 5. Докажите, что для любых точек $P_1, \ldots, P_n \in X$ найдётся вектор $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^g$ такой, что $\theta(\mathbf{e}) = 0$ и каждая из функции $\theta\left(\mathbf{e} + \int\limits_{P_i}^{y} \omega\right)$ не равна тождественно нулю.

Задача 6. Определим

$$E_{\mathbf{e}}(x, y) = \theta\left(\mathbf{e} + \int\limits_{x}^{y} \omega\right).$$

Пусть $\theta(\mathbf{e}) = 0$, $E_{\mathbf{e}}(x, y)$ не равна нулю тождественно. Опишите дивизор нулей функции $E_{\mathbf{e}}(x, y)$.

Задача 7. *Теорема Абеля.* Пусть $P_i, Q_i \in X$, $1 \leq i \leq n$. Существование мероморфной функции с нулями Q_i и полюсами P_i равносильно равенству $I(\sum P_i - \sum Q_i) = 0$.

Задача 8. $\theta(\mathbf{e}) = 0$ если и только если найдутся $P_1, \ldots, P_{g-1} \in X$ такие, что $\mathbf{e} = \triangle - \sum\limits_{i=1}^{g-1} \int\limits_{P_0}^{P_i} \omega$.