Тэта-функции

30 ноября 2007 года

Экзамен

Задача 1. Обозначим $q = \exp(\pi i \tau)$.
a). Проверьте равенство

$$\theta_{0,0}(0,q)^4 = -4q\frac{d}{dq}\left(\frac{\theta_{0,1}(0,q)}{\theta_{1,0}(0,q)}\right)$$

с точностью до q^4 включительно.
b^*). Докажите это равенство.
Задача 2. Испрльзуя равенство из Задачи 1, докажите, что

$$\theta(0,q)^4 = 1 + 8\sum_{m=0}^{\infty} q^m \left(\sum_{nn'=m} n\right) - 8\sum_{m=1}^{\infty} q^m \left(\sum_{4nn'=m} 4n\right).$$

Докажите теорему Лагранжа: любое натуральное число может быть представлено как сумма четырёх квадратов.
Задача 3. Пусть $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2g,\mathbb{R})$, A, B, C, D – $g \times g$ - матрицы. Докажите, что формула

$$(\mathbf{z},\Omega) \mapsto \left(((C\Omega+D)^t)^{-1}\cdot \mathbf{z}, (A\Omega+B)(C\Omega+D)^{-1}\right)$$

определет действие группы $Sp(2g,\mathbb{R})$ на произведении $\mathbb{C}^g$ и верхнего полупространства Зигеля.
Задача 4. Докажите, что для $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}^g$ выражение

$$\theta\begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\end{bmatrix}(N\mathbf{z},\Omega)\theta\begin{bmatrix}\mathbf{a}'\\ \mathbf{b}'\end{bmatrix}(N\mathbf{z},\Omega)^{-1}$$

является мероморфной функцией на торе. При каких $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{a}'_i, \mathbf{b}'_i \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}^g$ то же верно для

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\theta\begin{bmatrix}\mathbf{a}_i\\ \mathbf{b}_i\end{bmatrix}(\mathbf{z},\Omega)\theta\begin{bmatrix}\mathbf{a}'_i\\ \mathbf{b}'_i\end{bmatrix}(\mathbf{z},\Omega)^{-1}\right)?$$

Задача 5. Докажите, что для гиперэллиптических кривых с фиксированной точкой $P_0 = \infty$ выполняется

$$\triangle = \Omega v' + v'', \quad v', v'' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g, \quad v'_i = 1/2, \quad v''_i = \frac{g-i+1}{2}.$$

Проверьте, что множество нулей $\theta\begin{bmatrix}v'\\ v''\end{bmatrix}(\mathbf{z},\Omega)$ есть

$$\sum_{i=1}^{g-1}\int_{\infty}^{P_i}\omega, \quad P_i \in C.$$