Идеалы (примеры)

Задача 1. Найдите все идеалы и выясните, какие из них являются простыми/максимальными/главными в следующих кольцах.

a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) $F[[x]]$, где F — поле.

c) $\mathbb{Z}_p$, где p — простое число.

d) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

e^*) $\mathbb{Z}_l$.

f^*) $\mathbb{Q}_l$.

Задача 2. Приведите пример простого, но не максимального идеала в следующих кольцах. Найдите соответствующие факторкольца.

a) $\mathbb{Z}[x]$.

b) $\mathbb{C}[x, y]$.

c) $\mathbb{Z}_p[[x]]$.

Определение 1 Пусть $C([0, 1])$ — кольцо непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$.

Задача 3. Для $x \in [0, 1]$ пусть $I_x \subset C([0, 1])$ — идеал функций, обращающихся в ноль в точке x.

a) Найдите $C([0, 1])/I_x$.

b) Для $x \neq y$ найдите $I_x + I_y$, $I_x I_y$ и соответствующие факторкольца.

c) Докажите, что $I_x^2 = I_x$.

d^*) Докажите, что I_x нельзя породить конечным набором функций.

e^*) Докажите, что всякий максимальный идеал совпадает с I_x для некоторого x.

Определение 2 Пусть $C^\infty([0, 1])$ — кольцо гладких (дифференцируемых любое число раз) функций на отрезке $[0, 1]$.

Задача 4. Для $x \in [0, 1]$ пусть $I_x \subset C^\infty([0, 1])$ — идеал функций, обращающихся в ноль в точке x.

a) Найдите $C^\infty([0, 1])/I_x$.

b) Для $x \neq y$ найдите $I_x + I_y$, $I_x I_y$ и соответствующие факторкольца.

c) Найдите I_x/I_x^2.

d) Докажите, что I_x является главным.

e^*) Докажите, что всякий максимальный идеал совпадает с I_x для некоторого x.

Задача 5*. Докажите, что идеал (x^2, y) в $\mathbb{C}[x, y]$ не разлагается в произведение простых идеалов.

Задача 6. Пусть p и q — простые целые числа. Обозначим $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ кольцо чисел вида $a + b\sqrt{p}$, где a, $b \in \mathbb{Z}$

a) Сколько элементов в факторкольце $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]/q\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$?

b^*) Пусть $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{p}]$. Сколько элементов в факторкольце $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]/z\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$?

c^{**}) При каких q идеал $q\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ прост? Будет ли он при этом максимальным?