2×2

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей. Обозначим $\mathrm{Mat}_2(K)$ матрицы 2×2 с почленным сложением и матричным умножением.

Задача 1. a) Докажите, что $\mathrm{Mat}_2(K)$ является кольцом с единицей (E).

b) Требуется ли для этого коммутативность K?

Положим

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d, \qquad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Задача 2. a) Докажите, что $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$, $\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$ для $k \in K$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

b^*) Докажите, что всякая K-значная функция на $\mathrm{Mat}_2(K)$ с этими свойствами пропорциональна tr.

c) Над какими полями F существуют матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_2(F)$, такие что $AB - BA = E$?

Задача 3. a) Докажите, что $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

b) По матрице A постройте матрицу A^*, такую что $AA^* = A^*A = \det(A)E$.

c) Докажите, что матрица A является обратимой тогда и только тогда, когда обратим $\det(A)$.

d) Докажите, что матрица A является делителем нуля тогда и только тогда, когда $\det(A)$ является нулём или делителем нуля.

Задача 4. a) Выразите матрицу A^2 в виде линейной комбинации E и A.

b) Пусть K не имеет делителей нуля. Докажите, что если $A^k = 0$, то $A^2 = 0$. Для всякого ли K найдётся ненулевая матрица с этим свойством?

Задача 5. Найдите все двусторонние идеалы и вычислите соответствующие факторкольца для кольца

a) $\mathrm{Mat}_2(F)$, где F — поле,

b) $\mathrm{Mat}_2(K)$, где K — произвольное кольцо.

Задача 6. Найдите все левые/правые идеалы кольца

a) $\mathrm{Mat}_2(F)$, где F — поле,

b^*) $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$.

Задача 7. Пусть $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Экспонентой* матрицы $A \in \mathrm{Mat}_2(F)$ называется сумма ряда

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

a) Докажите, что этот ряд покоэффициентно сходится для любой матрицы.

b) Докажите, что если $AB = BA$, то $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

c) Верно ли это для любых A и B?

d) Найдите $\frac{d}{dt}\exp(tA)$.

e^*) Докажите, что $\det\exp(A) = \exp(\mathrm{tr}A)$.

Задача 8. a) Вложите поле $\mathbb{C}$ в кольцо $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

b^*) Вложите кольцо кватернионов в кольцо $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$.

Задача 9*. Докажите следующее *тождество* в $\mathrm{Mat}_2(K)$:

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_4} \mathrm{sign}(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} A_{\sigma(3)} A_{\sigma(4)} = 0, \qquad A_1,\, A_2,\, A_3,\, A_4 \in \mathrm{Mat}_2(K),$$

где Σ_4 — множество перестановок четырёх элементов, $\mathrm{sign}(\sigma)$ — знак перестановки.