Невырожденные билинейные формы

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ с билинейной формой $V \times V \to \mathbb{C}$, $v \times w \mapsto \langle v, w\rangle$. Форма не предполагается симметричной, то есть, вообще говоря, $\langle v, w\rangle \neq \langle w, v\rangle$. Введем два отображения

$$\lambda : V \to V^*, \quad v \mapsto \langle v, *\rangle, \qquad \rho : V \to V^*, \quad v \mapsto \langle *, v\rangle.$$

Задача 1. Докажите, что следующие условия эквиваленты:
1) λ — изоморфизм, 2) ρ — изоморфизм, 3) определитель матрицы Грама в некотором базисе отличен от нуля.

Определение 1 Форма, удовлетворяющая условиям Задачи 1 называется *невырожденной*

Далее мы будем все время предполагать, что форма невырождена.

Задача 2. Определим *канонический оператор* $\kappa = \rho^{-1}\lambda$.

a) Выразите матрицу для κ через матрицу Грама.

b) Докажите, что $\langle u, v\rangle = \langle v, \kappa u\rangle$.

c) Докажите, что κ является изометрией (то есть $\langle u, v\rangle = \langle \kappa u, \kappa v\rangle$).

d) Докажите, что κ является изоморфизмом векторных пространств.

Определение 2 Два векторных пространства V_1 и V_2 с билинейными формами называются *изоморфными* если существует отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, которое является изоморфизмом векторных пространств и изометрией (то есть $\langle u, v\rangle_1 = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle_2$).

Задача 3. Пусть на пространстве V есть две билинейные формы $\langle *, *\rangle_1$ и $\langle *, *\rangle_2$ с одинаковым каноническим оператором κ.

a) Докажите, что для $\psi = \rho_1^{-1}\rho_2$ выполнено $\langle u, v\rangle_2 = \langle u, \psi v\rangle_1$.

b^*) Докажите, что при этом $\psi = \lambda_1^{-1}\lambda_2$, а значит $\langle u, v\rangle_2 = \langle \psi u, v\rangle_1$.
Hint: Рассмотрите оператор, двойственный к κ.

c^*) Докажите, что пространства с формой $V, \langle *, *\rangle_1$ и $V, \langle *, *\rangle_2$ изоморфны.
Hint: Извлеките корень из ψ с помощью ряда.

Задача 4. Пусть оператор κ диагональный с собственными значениями $\lambda, \mu, \ldots$ Обозначим соответствующие собственные подпространства через $V_\lambda, V_\mu, \ldots$

a) Докажите, что $\langle V_\lambda, V_\mu\rangle = 0$, если $\lambda\mu \neq 1$.

b) Докажите, что подпространство $V_\mu \oplus V_{\mu^{-1}}$, где $\mu \neq \pm 1$, разлагается в ортогональную прямую сумму двумерных подпространств с матрицей Грама вида $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Докажите, что пространство V разлагается в ортогональную прямую сумму двумерных подпространств с матрицей Грама вида $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $\mu \neq 1$, и одномерных подпространств с матрицей Грама вида (1).

Рассмотрим теперь случай общего оператора κ. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ через V_λ будем обозначать соответствующее корневое подпространство:

$$V_\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(\kappa - \lambda E)^n.$$

Задача 5. Докажите, что $\langle V_\lambda, V_\mu\rangle = 0$, если $\lambda\mu \neq 1$.
Hint: Воспользуйтесь тем, что κ изометрия.

Рассмотрим подпространство $W_\mu = V_\mu \oplus V_{\mu^{-1}}$, где $\mu \neq \pm 1$.

Задача 6. a) Докажите, что можно выбрать базисы e_i, $i = 1 \ldots n$, в $V_{\mu^{-1}}$ и f_i, $i = 1 \ldots n$, в V_μ так, чтобы $(e_i, f_j) = \delta_{ij}$

b) Запишите матрицу Грама в базисе $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$, используя матрицу для κ.

c) Докажите, что W_μ разлагается в ортогональную прямую сумму подпространств с матрицей Грама вида

$$\begin{pmatrix}
 & & & & & \mu & 1 & & 0 & \\
 & & & & & & \mu & 1 & & \\
 & & 0 & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & 0 & & \mu & 1 \\
 & & & & & & & & & \mu \\
1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 0 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & 0 & & \\
 & 0 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & &
\end{pmatrix} \qquad (\clubsuit)$$

Определение 3 Будем говорить, что пространство с билинейной формой *разложимо*, если его можно представить в виде ортогональной прямой суммы ненулевых подпространств. Легко видеть, что любое пространство можно представить в виде ортогональной прямой суммы неразложимых.

Задача 7*. Докажите, что пространство размерности $2n$ с формой, заданной матрицей Грама ($\clubsuit$) неразложимо тогда и только тогда $\mu \neq (-1)^{n+1}$.

Пусть теперь $V = V_\epsilon$, где $\epsilon = \pm 1$.

Задача 8*. a^*) Докажите, что если V неразложимо, то κ состоит из одной жордановой клетки или двух одинаковых жордановых клеток.

b^{**}) Докажите, что если κ состоит из двух одинаковых жордановых клеток размера n, то $\epsilon = (-1)^n$ и матрица Грама приводится к виду ($\clubsuit$) с $\mu = \epsilon$.

c^{**}) Докажите, что если κ состоит из одной жордановой клетки размера n, то $\epsilon = (-1)^{n+1}$ и матрица Грама приводится к виду

$$\begin{pmatrix}
 & & & & & 1 \\
 & 0 & & & -1 & 1 \\
 & & & 1 & -1 & \\
 & & -1 & 1 & & \\
 & \ddots & \ddots & & 0 & \\
(-1)^{n-1} & (-1)^n & & & &
\end{pmatrix}$$