Тензорное произведение

Задача 1. Вычислите:

a) $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

c) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

d) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Задача 2. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, M — модуль.

a) Найдите $K \otimes_K M$.

b) Пусть $I \subset K$ — идеал. Найдите $K/I \otimes_K M$.

Задача 3. a) Пусть векторные пространства U и V конечномерны. Постройте изоморфизм

$$U^* \otimes V^* \xrightarrow{\sim} (U \otimes V)^*.$$

b^*) Что можно сказать о построенном отображении, если одно из пространств не конечномерно? А если оба?

Задача 4. Вычислите жорданову нормальную форму тензорного произведения жордановых клеток размера m и n.

Задача 5. Установите изоморфизм алгебр:

a) $F[x] \otimes_F F[y] \cong F[x, y]$,

b) $\mathrm{Mat}_n(F) \otimes_F F[x] \cong \mathrm{Mat}_n(F[x])$,

c) $\mathrm{Mat}_n(F) \otimes_F \mathrm{Mat}_m(F) \cong \mathrm{Mat}_{mn}(F)$,

d^{**}) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$, где $\mathbb{H}$ — алгебра кватернионов.

Задача 6*. Пусть U и V — конечномерные векторные пространства с билинейными формами, то есть линейными отображениями $\lambda_U : U \to U^*$, $\lambda_V : V \to V^*$. Определим билинейную форму на $U \otimes V$ как отображение $\lambda_U \otimes \lambda_V$, используя изоморфизм задачи 3.

a^*) Вычислите матрицу Грама этой формы, зная матрицы Грама исходных форм.

b^*) Докажите, что эта операция задаёт корректное умножение на $W(F)$, превращая группу Витта в коммутативное кольцо.

c^*) Вычислите кольцо Витта для $F = \mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

d^*) Вычислите кольцо Витта для $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где $p > 2$ — простое натуральное число.