Экзамен

Задача 1. Сколько существует решений уравнения $x^2 = a$ в кольце кватернионов в зависимости от параметра $a \in \mathbb{H}$

a) для $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$, b) для $a \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, c) для произвольного $a \in \mathbb{H}$?

Задача 2. Разложите в цепную дробь, использующую числа Гаусса, следующие комплексные числа:

a) $\frac{1+2i}{7}$, b) $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (здесь дробь будет бесконечной).

Задача 3. В кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$, составленном комплексными числами вида $a + b\sqrt{-6}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$,

a) разложите 6 на простые множители всеми возможными способами;

b) разложите главный идеал (6) в произведение простых идеалов.

Задача 4. Найдите все a) циклические, b) неприводимые, c) неразложимые модули с точностью до изоморфизма над кольцом $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Задача 5. Приведите жорданову клетку размера $n \times n$ с λ на диагонали

a) сопряжениями к нормальной форме Фробениуса над произвольным полем F, предполагая $\lambda \in F$;

b) обратимыми преобразованиями к нормальной форме Смита над евклидовым кольцом K, предполагая $\lambda \in K$.

Задача 6. Вычислите группу Витта поля формальных рядов Лорана $\mathbb{C}[t^{-1}, t]]$.

Задача 7. Есть ли в алгебре $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ делители нуля?