Экзамен

Задача 1. Сколько существует решений уравнения $x^5 = a$ в кольце кватернионов в зависимости от параметра $a \in \mathbb{H}$ для

a) $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$, b) $a \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, c) $a \in \mathbb{H}$.

Задача 2. Разложите в цепную дробь, использующую числа Эйзенштейна, следующие комплексные числа:

a) $\frac{3\sqrt{3}i+2}{7}$,

b) i (здесь дробь будет бесконечной, позаботьтесь о сходимости).

Задача 3. Разложите на простые множители

a) идеал в $\mathbb{C}[x,y]$, порождённый x^2+2y^2-1 и $2x^2+y^2-1$,

b) идеал в $\mathbb{C}[x,y,z]$, порождённый $x^2+2y^2+3z^2-1$ и $3x^2+2y^2+z^2-1$.

Задача 4. Найдите все a) циклические, b) неприводимые, c) неразложимые левые модули над кольцом кватернионов.

Задача 5. Приведите матрицу $\begin{pmatrix} x^2-1 & x+1 \\ x-1 & x^2-1 \end{pmatrix}$

a) обратимыми преобразованиями к нормальной форме Смита над кольцом $\mathbb{C}[x]$,

b) сопряжениями к нормальной форме Фробениуса над полем $\mathbb{C}[x^{-1},x]]$.

Задача 6. Вычислите группу Витта поля рациональных 3-адических чисел $\mathbb{Q}_3$.

Задача 7. Пусть A — абелева группа. Могут ли в абелевой группе $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ быть элементы конечного порядка?