Ключевые понятия и утверждения

Множество, подмножество, отношение эквивалентности, множество классов эквивалентности. Отображение множеств, композиция отображений. Вложение, наложение, взаимно-однозначное отображение. Образ, прообраз подмножества. Корректность отображения множества классов. Упорядоченные множества, лемма Цорна.

Поле, подполе, характеристика поля, алгебраическая замкнутость. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Норма, пополнение поля. Поле частных целостного кольца.

Кольцо, подкольцо, декартово произведение колец. Отображение колец, изоморфизм колец, ядро и образ отображения. Кольцо Гротендика полукольца.

Примеры: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$, $F[x]$, $F[x_1, \ldots, x_n]$, $F[[x]]$, $F[[x^{-1}]$, числа Гаусса и Эйзенштейна.

Евклидово кольцо, алгоритм Евклида, цепные дроби, разложение на простые множители (существование и единственность), решение линейного диофантова уравнения.

Идеал, левый и правый идеал. Факторкольцо. Произведение, пересечение и сумма идеалов. Китайская теорема об остатках. Идеал, порождённый подмножеством, главный идеал. Идеалы евклидового кольца главные. Для коммутативного кольца: простой идеал, максимальный идеал, факторкольцо по простому/максимальному идеалу.

Решение системы линейных уравнений над полем, метод Гаусса, приведение матрицы элементарными преобразованиями к диагональному виду.

Решение системы линейных уравнений над евклидовым кольцом, приведение матрицы обратимыми преобразованиями к нормальной форме Смита.

Векторное пространство, подпространство, факторпространство, прямая сумма пространств. Пересечение и сумма подпространств. Базис, размерность. Линейное отображение векторных пространств, изоморфизм векторных пространств, запись отображения матрицей, ядро и образ, ранг. Двойственное векторное пространство, двойственный базис, двойственное отображение.

Модули (левые, правые, бимодули), подмодули, фактормодули, прямая сумма модулей. Пересечение и сумма подмодулей. Свободный модуль. Образующие модуля. Циклический, неприводимый и неразложимый модуль. Отображение модулей, ядро и образ отображения. Соотношения. Двойственный модуль, двойственное отображение модулей.

Модули над евклидовыми кольцами, теорема о разложении (существование и единственность). Следствия для абелевых групп и линейных операторов.

Линейный оператор, определитель, собственный вектор. Жорданова нормальная форма, нормальная форма Фробениуса.

Квадратичная форма, билинейная форма на векторном пространстве, билинейная симметрическая форма. Ортогональная прямая сумма. Изометрия. Матрица Грама. Приведение матрицы Грама к диагональному виду. Ядро формы. Классификация билинейных симметрических форм с точностью до изометрии для поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Изотропное подпространство, анизотропное подпространство. Разложение Витта (существование и единственность). Группа Витта, классификация билинейных симметрических форм с точностью до изометрии для произвольного поля. Вычисление группы Витта для поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Тензорное произведение модулей над коммутативным кольцом. Размерность тензорного произведения векторных пространств. Тензорное произведение отображений. Неравносоставленность куба и правильного тетраэдра.

Алгебра над кольцом. Тензорное произведение и прямая сумма алгебр.