Алгебра 3-1

1. а) Докажите что $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] = \mathbb{Q} \oplus F_p$, где $F_p = \mathbb{Q}[\zeta_p]$ – поле деления круга, ζ_p- первообразный корень из единицы p-ой степени.

2. Докажите что $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}]$ изоморфна прямой сумме полей.

3. Найдите нериводимое рациональное представление группы $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}]$ степени $\phi(M)$, M делит N и ϕ – функция Эйлера.

4. Что вы можите сказать о групповой алгебре $\mathbb{F}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$?

Рассмотрим пространство вещественных вектор-столбцов высоты n с суммой координат равной нулю. Симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ действует на этом пространстве перестановками координат. Обозначим это представление (V_n, ρ_n). Имеется другое действие: перестановка координат и умножение на знак перестановки. Обозначим это представление $(V_n^{sign}, \rho_n^{sign})$.

5. Докажите, что (V_n, ρ_n) неприводимо.

6. Докажите, что (V_3, ρ_3) изоморфно $(V_3^{sign}, \rho_3^{sign})$.

7. Докажите, что (V_n, ρ_n) неизоморфно $(V_n^{sign}, \rho_n^{sign})$ если $n > 3$.

8.Докажите что групповая алгебра $\mathbb{R}[\mathfrak{S}_3] = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ где Mat_2 обозначает матрицы 2×2.

9. Докажите, что вещественное представление конечной группы ортогонализуемо, то есть существует положительно определенная квадратичная форма Q, сохраняемая действием группы: $Q(\rho(v)) = Q(v)$.

10. Докажите, что комплексное представление конечной группы унитаризуемо.

11. Выведите из задач 9 и 10 теорему Машке для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.