Алгебра 3-10

Рассмотрим грассманову алгебру Λ^n от n переменных $\xi_1, \cdots, \xi_n$. Определим оператор производной $\partial_j = \partial/\partial\xi_j$ по j-му переменному действием на мономах: $\partial_j\Phi = 0$ если Φ не содержит ξ_j, $\partial_j(\xi_j \wedge \Phi) = \Phi$ Φ не содержит ξ_j.

1. Найдите правило производной произведения в грассмановом случае.

2. Рассмотрим четномерное векторное пространство V с базисом $e_i, f_i, i = 1, \cdots, n$ и симметричной билинейной формой $B, B(e_i, e_j) = B(f_i, f_j) = 0, B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Положим что e_j действует на грассманову алгебру Λ^n от n переменных $\xi_1, \cdots, \xi_n$ умножением слева на ξ_j а f_j действует на грассманову алгебру Λ^n дифференцированием ∂_j. Докажите что данная конструкция задает на Λ^n структуру модуля над алгеброй Клиффорда $C(V, B)$ формы B.

3. Докажите что алгебра Клиффорда формы $-x^2-y^2$ над $\mathbb{R}$ совпадает с алгеброй кватернионов.

4. Что можно сказать о алгебрах Клиффорда квадратичных вещественных бинарных форм (т.е. при других выборах знаков в форме из задачи 3).

5. Чему равен центр второй алгебры Клиффорда вещественной квадратичной формы

$$\sum_{j=1}^{2n} \epsilon_i x_i^2, \epsilon = \pm 1$$

как алгебра.