Алгебра 3-3

Все алгебры предпологаются конечномерными векторными пространствами, модули - также конечномерными векторными пространствами и модулная структура совместима с структурой векторного пространства.

1. Пусть V_1, ρ_1 – неприводимое представление с алгеброй эндоморфизмов D_1, а V_2, ρ_2 – другое (не изоморфное V_1, ρ_1) неприводимое представление с алгеброй эндоморфизмов D_2. Найдите алгебру эндоморфизмов их прямой суммы: $V_1 \oplus V_2, \rho_1 \oplus \rho_2$.

2. Пусть V, ρ – неприводимое представление с алгеброй эндоморфизмов D.Найдите алгебру эндоморфизмов прямой суммы V, ρ с собой: $V \oplus V, \rho \oplus \rho$.

3. Обобщите задачи 1 и 2 в максимальной общности.

4. Вычислите алгебру эндоморфизмов представления (V_n, ρ_n) группы $\mathfrak{S}_n$ из листка 3-1. Выведите из этого неприводимость представления воспользовавшись задачей 3.

5. Пусть R – ассоциативная алгебра с единицей, V – R-модуль. Обозначим через $R^!$ алгебру эндоморфизмов R-модуля V. Определите на $V \oplus V$ структуру модуля над $Mat_2(R)$ и вычислите его алгебру эндоморфизмов.

6. Докажите что $Mat_n(R)^{op} = Mat_n(R^{op})$.

7. Докажите что $\mathbb{H}^{op} = \mathbb{H}$.

8. Докажите что групповая алгебра коммутативной конечной группы есть прямая сумма полей если характеристика поля не делит порядок группы.

9. Пусть прямая сумма алгебр обладает единицей. Докожите что каждое слагаемое обладает единицей.

10. Докажите что центр прямой сумма алгебр есть прямая сумма центров.

11. Пусть модуль M над алгеброй A полупрост, т.е. равен прямой сумме простых. Докажите что всякому подмодулю L найдется дополнительный $L^\perp$: $M = L \oplus L^\perp$.