**Алгебра 3-4**

Группы предпологаются конечными, представления комплексными. Эрмитово произведение на пространстве комплекснозначных функций задается формулой

$$< \phi, \psi >= \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} \phi(g)\overline{\psi(g)}.$$

Функция называется центральной если она принимает одинаковые значения на сопряженных элементах.

1. Пусть $V_1$ и $V_2$ – неизоморфные неприводимые представления конечной группы $G$; а $h$ – произвольное линейное отображение $V_1$ в $V_2$. Докажите что усреднение $h$ равно нулю.

2. Пусть $V$ – неприводимое представление конечной группы $G$ степени $n$; $h$ – произвольное линейное отображение $V$ в себя. Докажите что усреднение $h$ действует умножением на $\mathrm{Tr}(h)/n$.

3. Вычислите матричные элементы усредненных линейных отображений из задач 1. 2.

4. Для унитарного представлений выведите соотношения ортогональности для матричных элементов представлений в унитарных базисах.

5. Докажите что элемент из центра групповой алгебры действует в неприводимом представлении умножением на спаривание этого элемента с характером представления.

6. Докажите что элемент из центра групповой алгебры нетривиально действует в регулярном представлении.

7. Докажите что характеры неприводимых представлений образуют базис центральных функций на группе. Стало быть число неизоморфных неприводимых представлений равно числу класов сопряженности элементов группы.

8. Представление неприводимо титтк квадрат его характера равен единице.

9. Кратность вхождения неприводимого представления в любое равна эрмитову произведению характера этого представления с характером неприводимого.

10. Найдите характер регулярного представления. Вычислите кратность вхождения неприводимого представления в регулярное.