Алгебра 3-5

Напомним что тензорное произведение $R_1 \otimes_k R_2$ алгебр R_1 и R_2 над полем k – это тензорное произведение как векторных пространств снабженное операцией умножения $a_1 \otimes a_2 \circ b_1 \otimes b_2 = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$.

Тензорное произведение $A_1 \otimes A_2$ операторов $A_1 \in \mathrm{End}(V_1)$ и $A_2 \in \mathrm{End}(V_2)$ действует на $V_1 \otimes V_2$ по формуле $A_1 \otimes A_2 (v_1 \otimes v_2) = A_1(v_1) \otimes A_2(v_2)$.

Для групп G_1 и G_2 и их представлений (V_1, ρ_1) и (V_2, ρ_2) определим представление $(V_1 \boxtimes V_2, \rho_1 \boxtimes \rho_2)$ группы $G_1 \times G_2$ как $V_1 \boxtimes V_2 = V_1 \otimes V_2$, $\rho_1 \boxtimes \rho_2 (g_1 \times g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$.

С другой стороны, для представлений (V_1, ρ_1) и (V_2, ρ_2) группы G определено их тензорное произведение $(V_1 \otimes V_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$– представление той же группы G, где $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$.

1. Чему равно тензорное произведение $\mathrm{Mat}_m(k) \otimes_k \mathrm{Mat}_n(k)$ матричных алгебр?

2. Вычислите $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

3. Вычислите $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$.

4. Докажите что $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

5. Выразите характер представления $(V_1 \boxtimes V_2, \rho_1 \boxtimes \rho_2)$ через характеры сомножителей.

6. Докажите что для комплексных представлений $(V_1 \boxtimes V_2, \rho_1 \boxtimes \rho_2)$ неприводимо если сомножители неприводимы.

7. Докажите что для комплексных представлений любое неприводимое представление группы $G_1 \times G_2$ имеет вид $(V_1 \boxtimes V_2, \rho_1 \boxtimes \rho_2)$.

8. Обозначим неприводимое представление степени четыре кватернионной группы Q_8 через H. Докажите что представление $H \boxtimes H$ группы $Q_8 \times Q_8$ приводимо.

9. Выразите характер представления $(V_1 \otimes V_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$ через характеры сомножителей.

10. Найдите характеры неприводимых представлений симметрической группы $\mathfrak{S}_3$.

11. Найдите кратности вхождения неприводимых представлений в тензорный квадрат $V_3 \otimes V_3$ двумерного неприводимого представления симметрической группы $\mathfrak{S}_3$.