Алгебра 3-9

1. Пусть S - множество на котором действует группа G. Задайте на векторном пространстве k^S k-значных функций на S структуру представления группы G.

2. Постройте изоморфизм между регулярным представлением $k[G]$ и k^G, где G действует на себе левыми сдвигами.

Пусть W - представление погруппы H группы G. Рассмотрим пространство W^G W-значных функций на G. На этом пространстве группа H действует тремя способами, а именно как в в задаче 1., через действие правыми сдвигами на G (определите это действие) и непосредственно на W. Рассмотрим подпространство $V \subset W^G$ функций таких что второе и третье действие на них совпадают.

3. Докажите что действие G на W^G посредством левых сдвигов переводит V в себя.

4. Докажите что V изоморфно индуцированному из W представлению.

5. Пусть V – представление группы G, а W – представление ее подгруппы H. Постройте естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}(W), V) \to \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}(V)).$$

6. Выведите из задачи закон взаимности Фробениуса.

7. Вычислите представление диэдральной группы, индуцированное с характера циклической подгруппы.

8. Вычислите представление группы

$$GA(\mathbb{F}_p) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{F}_p^*, b \in \mathbb{F}_p$$

индуцированное из характера подгруппы

$$\mathbb{F}_p = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$