Действительные числа. Пределы последовательностей

Задача 1. Пусть r, r', r'' — последовательности действительных чисел. Докажите, что если $r \sim r'$ и $r' \sim r''$, то $r \sim r''$.

Задача 2. Докажите, что различным действительным числам отвечают неэквивалентные десятичные последовательности, а одинаковым — эквивалентные.

Задача 3. Докажите, что десятичная последовательность действительного числа является последовательностью Коши.

Задача 4. Докажите, что $a+b=b+a$ и $a(b+c)=ab+ac$ для всех $a,b,c \in \mathbb{R}$. Дома проверьте выполнение остальных аксиом поля для $\mathbb{R}$.

Задача 5. Докажите, что для любых различных $a,b \in \mathbb{R}$ выполнено либо $a<b$, либо $b<a$.

Задача 6. Дайте определение $\sqrt{2}$, докажите его существование и иррациональность.

Задача 7. Дайте определение a^b, где $a,b \in \mathbb{R}$, $a>0$.

Задача 8. Есть ли такие $a,b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, что **а)** $a+b \in \mathbb{Q}$, **б)** $ab \in \mathbb{Q}$, **в)*** $a^b \in \mathbb{Q}$?

Задача 9. Рационально ли число $\sin 20°$?

Задача 10. На плоскости в точках с натуральными координатами сидят зайцы диаметром $0,001$ каждый. В начале координат стоит охотник с ружьем, стреляющим бесконечно далеко. Докажите, что под каким бы углом $\alpha \in (0°, 90°)$ к оси абсцисс он ни выстрелил, он попадет в зайца (т.е. пуля пройдет мимо центра одного из зайцев на расстоянии, меньшем радиуса зайца).

Определение. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Наименьшая из степеней таких многочленов называется *степенью* α. Действительные числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*.

Задача 11.* **(Теорема Лиувилля).** Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — иррациональное алгебраическое число степени не выше r. Покажите, что существует такое $c>0$, что $|\alpha - p/q| > c/q^r$ для всех $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$.

Задача 12. Докажите, что любая последовательность имеет не более одного предела, и, если он существует, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

Задача 13. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -a$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$ и (при $b \neq 0$) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Задача 14. Докажите, что эквивалентные последовательности либо обе не имеют предела, либо имеют один и тот же предел.

Задача 15. Найдите такое $n \in \mathbb{N}$, $n>1$, что $2^n > n^{1000}$.

Задача 16. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$ при $a>1$.

Задача 17. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}$ и $a>1$.

Задача 18. Найдите такое $n \in \mathbb{N}$, что $1000^n < n!$.

Задача 19. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ для любого $a>1$.

Задача 20. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Задача 21. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Задача 22. **а)** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+\dots+a_n}{n} = a$.
б) Покажите, что обратное неверно.