Функциональные ряды. Равномерная сходимость

Задача 1. Исследуйте ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ на сходимость и на равномерную сходимость на отрезках $[0,1-\delta]$ и $[0,1]$.

Задача 2. Исследуйте ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, где $\alpha\in\mathbb{R}$, на сходимость и на равномерную сходимость на множествах **1)** $[0,+\infty)$, **2)** $[\delta,+\infty)$, **3)** $(0,+\infty)$.

Задача 3. Пусть (f_n) — последовательность функций на $[a,b)$ (где $b\in\mathbb{R}$ или $b=+\infty$), равномерно сходящаяся к функции f. Предположим, что для любого $n\in\mathbb{N}$ существует предел $a_n=\lim\limits_{x\to b} f_n(x)$. Докажите, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ существуют и равны друг другу.

Задача 4. Пусть $(a_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ — двойная числовая последовательность.
1) Придумайте условие, достаточное для того, чтобы из существования пределов $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}$ следовало существование и равенство повторных пределов $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn})$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn})$.
2) Приведите пример ситуации, когда один повторный предел существует, а второй — нет.
3) Приведите пример ситуации, когда оба повторных предела существуют, но не равны друг другу.

Задача 5. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании функциональных последовательностей, не предполагая, что производные членов последовательности непрерывны.

Задача 6. (*Преобразование Абеля*). Докажите, что для любых чисел $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ верно равенство $\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k = a_nB_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}B_k(a_{k+1}-a_k)$, где $B_k=\sum\limits_{j=1}^{k} b_j$.

Задача 7. (*Признак Дирихле*). Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$. Предположим, что
1) последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно стремится к нулю и монотонна для всех x;
2) частичные суммы ряда $\sum_n b_n(x)$ равномерно ограничены (т.е. существует такое $C>0$, что для всех x и N справедливо неравенство $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n(x)\right|\leqslant C$).
Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится.

Задача 8. (*Признак Абеля*). Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$. Предположим, что
1) последовательность $\{a_n(x)\}$ монотонна для всех x и равномерно ограничена;
2) ряд $\sum_n b_n(x)$ равномерно сходится.
Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится.

Задача 9. Исследуйте на сходимость и на равномерную сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$, где $p \in \mathbb{R}$.

Задача 10. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = f(x)$ при всех $x \in [a, b]$, причем $f, a_n \in C[a, b]$.

1) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится равномерно.

2) Верно ли это утверждение без условия $f \in C[a, b]$?

Определение. Пусть (a_n) — последовательность в $\mathbb{R}$. Ее *верхним пределом* называется наибольший из пределов ее подпоследовательностей. Обозначается он через $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

Задача 11. Докажите, что у любой последовательности действительных чисел существует верхний предел (конечный либо равный $+\infty$), и что он равен пределу $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sup\limits_{k \geqslant n} a_k\big)$.

Задача 12. Дайте определение нижнего предела $\underline{\lim}_n a_n$, докажите его существование и установите формулу, аналогичную формуле из предыдущего упражнения.

Задача 13. Пусть R — радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_n \in \mathbb{R})$. Обозначим через E множество всех $x \in \mathbb{R}$, для которых этот ряд сходится.

A) Придумайте ряды, для которых **1)** $E = \{0\}$; **2)** $E = [-R, R]$; **3)** $E = (-R, R]$; **4)** $E = [-R, R)$; **5)** $E = (-R, R)$.

B) Пусть дан степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ с радиусом сходимости $R > 0$ и множеством сходимости E (см. п. **A**). Каким может быть семейство всех подмножеств $\mathbb{R}$, на которых этот ряд равномерно сходится?

Задача 14. Найдите радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$.

Задача 15. Найдите сумму ряда **1)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

Задача 16. Вычислите сумму $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$.

Задача 17. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — степенной ряд, $R > 0$ — его радиус сходимости. Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Докажите, что функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ непрерывна на $[0, R]$.

Задача 18. Вычислите радиусы сходимости рядов Тейлора известных вам элементарных функций и докажите, что эти функции аналитические.

Задача 19. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции f, ряд Тейлора которой **1)** расходится в каждой точке, кроме нуля; **2)** сходится всюду, но не к функции f.