Пределы. Полнота $\mathbb{R}$. Компактность отрезка

Задача 1. Пусть $a = \lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.
1) Пусть $a_n < b_n$ для всех n. Верно ли, что $a < b$?
2) Пусть $a < b$. Следует ли отсюда какое-нибудь неравенство между членами последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$?
3) Пусть $a \leqslant b$. Следует ли отсюда какое-нибудь неравенство между членами последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$?

Задача 2. (Теорема о двух милиционерах.) Пусть $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ для всех n, и пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$. Докажите, что тогда существует $\lim_{n\to\infty} b_n$, и что он равен a.

Задача 3. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{R}$. Исследовать, существуют ли следующие пределы, и чему они могут быть равны: **1)** $\lim_{n\to\infty}(a_n+c_n)$; **2)** $\lim_{n\to\infty} a_n c_n$; **3)** $\lim_{n\to\infty} 1/a_n$; **4)** $\lim_{n\to\infty} 1/c_n$; **5)** $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$; **6)** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Определение. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — ограниченное сверху подмножество. Его *точной верхней гранью* называется число $\sup M = \min\{c \in \mathbb{R} : x \leqslant c \ \forall x \in M\}$. Эквивалентно, число $m \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью множества M, если $x \leqslant m \ \forall x \in M$ и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M : x > m - \varepsilon$.

Задача 4. Дайте определение *точной нижней грани* $\inf M$ ограниченного снизу подмножества $M \subset \mathbb{R}$. Установите взаимосвязь понятий точной нижней и точной верхней грани.

Задача 5. Докажите, что следующие пять свойств множества $\mathbb{R}$ эквивалентны друг другу.
1) Любая последовательность Коши в $\mathbb{R}$ сходится.
2) Если $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing$.
3) Если $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков и $\lim_{n\to\infty}(\text{длина } I_n) = 0$, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing$.
4) Любое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.
5) Любое ограниченное снизу подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань.
6) Для любых подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $a \leqslant b$ для всех $a \in A$, $b \in B$, найдется такое $c \in \mathbb{R}$, что $a \leqslant c \leqslant b$ для всех $a \in A$, $b \in B$.
7) Любая монотонная и ограниченная последовательность в $\mathbb{R}$ имеет предел.

Каждое из свойств **1)–7)** принято называть *свойством полноты* $\mathbb{R}$.

Задача 6. Если вы еще не сделали задачу 7 с предыдущего семинара, то сделайте ее теперь.

Определение. Говорят, что подмножество $M \subset \mathbb{R}$ *компактно*, если из любого его покрытия интервалами можно выделить конечное подпокрытие (т.е. если для любого семейства интервалов $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, такого, что $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \supset M$, найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, что $U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n} \supset M$).

Задача 7. Докажите, что следующие два утверждения эквивалентны:
1) Любая ограниченная последовательность в $\mathbb{R}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.
2) Любой отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен.

В следующих двух задачах f_1, f_2 и т.д. — функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Задача 8. Если $f_1 \sim f_2$ $(x \to x_0)$, $f_2 \sim f_3$ $(x \to x_0)$, то $f_1 \sim f_3$ $(x \to x_0)$.

Задача 9. Пусть $f_1 \sim g_1$ $(x \to x_0)$ и $f_2 \sim g_2$ $(x \to x_0)$.
1) Докажите, что $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ $(x \to x_0)$.
2) Если f_2 и g_2 не обращаются в 0 в некоторой окрестности x_0, то $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ $(x \to x_0)$.
3) Верно ли, что $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ $(x \to x_0)$?

Задача 10. *Числами Фибоначчи* называется последовательность чисел $\{f_n\}$, заданная рекуррентно: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что существует $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$, и найдите его.