Пределы и непрерывность

Задача 1. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n^3+4)^8}{(2n^2+7n-9)^{12}}$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-2})$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$; **4)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

Задача 2. (число e). Докажите, что существует предел $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Задача 3. Докажите, что следующие последовательности имеют пределы, и найдите их: **1)** $x_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}}}_{n}$; **2)** $x_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}}_{n}$; **3)** $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, где числа p_n, q_n определены рекуррентно: $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $p_{n+1} = p_n + q_n$, $q_{n+1} = 2p_n + q_n$.

Задача 4. Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$?

Задача 5. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ — функция, и $c \in I$. Известно, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell$. Верно ли, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: при $|x-c| < \delta$, $x \in I$ выполнено $|f(x)-\ell| < \varepsilon$?

Задача 6. *(эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши).* Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ — функция, и $c \in I$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell \iff$ для любой последовательности $\{x_n\} \subset I \setminus \{c\}$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

Задача 7. Пусть f и g — функции на прямой. Известно, что $\lim\limits_{y\to a} f(y) = b$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$. Верно ли, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = b$?

Задача 8. Пусть $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ — монотонная функция, и $c \in (a,b)$. Докажите, что существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$.

Задача 9. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Задача 10. Найдите пределы **1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ и **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

Задача 11. Докажите, что сумма, разность, произведение и композиция непрерывных функций тоже непрерывны. Докажите, что если функция f непрерывна и не обращается в нуль, то и функция $1/f$ непрерывна.

Задача 12. Докажите непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0, +\infty)$.

Задача 13. Верно ли, что непрерывная функция на интервале ограничена? Если она ограничена, то верно ли, что она достигает максимума и минимума?

Задача 14. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ переводит каждый отрезок в отрезок. Следует ли отсюда, что она непрерывна?

Задача 15. Докажите, что непрерывная функция на отрезке обладает обратной функцией тогда и только тогда, когда она строго монотонна. При этом обратная функция также непрерывна, строго монотонна, и ее график симметричен графику исходной функции относительно прямой $y = x$.

Задача 16. (домашнее задание). Определите функцию $f(x) = a^x$ (где $a > 0$) на $\mathbb{R}$. Покажите, что она монотонно возрастает (убывает) при $a > 1$ ($a < 1$) и непрерывна. Определите ее обратную функцию $g(x) = \log_a x$ на $(0, +\infty)$, а также функцию $h(x) = x^\alpha$ (где $\alpha \in \mathbb{R}$) на $(0, +\infty)$, и докажите их непрерывность.

Задача 17. Докажите, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

всюду разрывна.

Задача 18. Докажите, что функция Римана

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{если } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ — несократимая дробь;} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

непрерывна в иррациональных точках и разрывна в рациональных.

Задача 19.* Существует ли функция, непрерывная в рациональных точках и разрывная в иррациональных?

Задача 20. Докажите, что на экваторе найдутся две диаметрально противоположные точки, температура в которых одинакова.

Задача 21.* На сковородке лежат два блина. Докажите, что их можно разрезать одним взмахом ножа так, что каждый распадется на два куска одинаковой площади[1].

Задача 22. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.
1) Докажите, что если f непрерывна, то $f(x) = ax$ для всех x (где $a = f(1)$).
2)* Докажите, что если f разрывна, то она неограничена на любом интервале.

Задача 23. Докажите, что функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна $\iff$ она продолжается до непрерывной функции на $[a,b]$.

Задача 24. Пусть последовательности ограниченных функций $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, определенных на подмножестве $I \subset \mathbb{R}$, равномерно сходятся к функциям f и g соответственно. Докажите, что $f_n \pm g_n$ равномерно сходится к $f \pm g$, а $f_n g_n$ — к fg.

Задача 25. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций на $[a,b]$, равномерно сходящаяся к функции f. Докажите, что f непрерывна.

Задача 26. 1) Постройте последовательность непрерывных функций f_n, поточечно сходящуюся к функции Римана.
2)* Существует ли последовательность непрерывных функций, поточечно сходящаяся к функции Дирихле?

[1] Строго говоря, мы еще не знаем, что такое площадь, поэтому считайте, что блины многоугольные.