Производная

Задача 1. Пусть функции u и v определены в окрестности точки x и дифференцируемы в x. Докажите, что функции $u+v$, uv, а также u/v (при условии $v(x) \neq 0$) дифференцируемы в x, и что $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$, $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$.

Задача 2. Найдите производную функции $f(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+100)$ в точке $x = -1$.

Задача 3. 1) Дайте определение правой производной $f'_+(x_0)$ и левой производной $f'_-(x_0)$.
2) Дайте определение бесконечной производной ($+\infty$, $-\infty$ и ∞).
3) Пусть f дифференцируема на $[x_0, x_0+h)$. Верно ли, что $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} f'(x)$?

Задача 4. Докажите, что производная четной дифференцируемой функции нечетна, а нечетной — четна.

Задача 5. Придумайте функцию f на прямой, которая непрерывна только в одной точке и в ней дифференцируема.

Задача 6. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0, дифференцируема в x_0 и $f'(x_0) > 0$.
1) Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(x_0-\delta) < f(x_0) < f(x_0+\delta)$ при $0 < \delta < \varepsilon$.
2) Может ли предыдущее условие выполняться при $f'(x_0) < 0$? А при $f'(x_0) = 0$?

Задача 7. Обоснуйте правомерность «замены переменной» в доказательстве теоремы о производной обратной функции.

Задача 8. Докажите непрерывность функций $\sin x$ и $\cos x$.

Задача 9. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Задача 10. Найдите производные функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Задача 11. Вычислите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

Задача 12. Найдите производные функций a^x, $\log_a x$, x^α.

Задача 13. Пусть функция f возрастает на (a,b) и дифференцируема. Следует ли отсюда, что $f'(x) > 0$ всюду на (a,b)?

Задача 14. Пусть функция f дифференцируема на (a,b) и $f'(x_0) > 0$ для некоторого $x_0 \in (a,b)$. Верно ли, что f возрастает в некоторой окрестности x_0?

Задача 15. Найдите $\max_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n}$.

Задача 16. Пусть f — непрерывная периодическая функция на прямой. Для каждого $h \neq 0$ положим $f_h(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1) f дифференцируема на $\mathbb{R}$, и ее производная f' непрерывна на $\mathbb{R}$.

2) функции f_h равномерно сходятся на $\mathbb{R}$ при $h \to 0$.

Задача 17. Сформулируйте и докажите правило Лопиталя о пределе $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ при условии, что

1) $a = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ (разобрать 4 возможных случая).

Задача 18. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$.

Определение. Пусть функция f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Прямая $y = kx + b$ называется *касательной* к графику функции f в точке x_0, если $f(x) = kx + b + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

Задача 19. Докажите, что касательная к графику f, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$, задается уравнением $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Задача 20. На плоскости в точке $(p/2, 0)$ находится источник света. Докажите, что лучи, выпущенные из источника, после отражения от параболического зеркала $y^2 = 2px$ распространяются параллельно друг другу.

Задача 21. Найдите все дифференцируемые функции y на прямой, удовлетворяющие уравнению $y' = \lambda y$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ — фиксированное число).

Задача 22. Пусть функция f дифференцируема на $[a, b]$. Докажите, что ее производная на $[a, b]$ принимает все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$. (*Указание:* рассмотрите частный случай, когда $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки.)