Интеграл

Задача 1. Докажите, что сумма и произведение ступенчатых функций — тоже ступенчатые функции. Докажите, что для любых ступенчатых функций f, g и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения

1) $\int\limits_a^b (\lambda f + \mu g)\,dx = \lambda \displaystyle\int_a^b f\,dx + \mu \int_a^b g\,dx$; **2)** $|\int\limits_a^b f\,dx| \leqslant \int\limits_a^b |f|\,dx$.

Задача 2. Пусть $f, g \in C[a,b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Докажите выполнение соотношений из предыдущей задачи, а также следующих свойств:

1) $\min\limits_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f\,dx \leqslant \max\limits_{[a,b]} f$; **2)** если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f\,dx \leqslant \int\limits_a^b g\,dx$.

Задача 3. Пусть $f \in C[a,b]$. Докажите, что $\int\limits_a^b f\,dx = f(c)(b-a)$ для некоторой точки $c \in (a,b)$.

Задача 4. Пусть $f \in C[a,b]$. Докажите, что для любых $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ выполнено равенство $\int\limits_\alpha^\gamma f\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\,dx + \int\limits_\beta^\gamma f\,dx$.

Задача 5. Пусть $f \in C[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a,b]$ и $\int\limits_a^b f\,dx = 0$. Докажите, что $f = 0$.

Задача 6. (*Метод прямоугольников*). Пусть $f \in C^1[a,b]$ (т.е. f — дифференцируемая функция на $[a,b]$, производная которой непрерывна). Для каждого n разобьем $[a,b]$ на n равных частей точками $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, и рассмотрим ступенчатую функцию g_n, равную $f(t_k)$ на полуинтервале $(t_k, t_{k+1}]$ $(k = 0, \ldots, n-1)$. Докажите, что

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g_n(t)\,dt\Big| < M_1 \frac{(b-a)^2}{2n},$$

где $M_1 = \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

Задача 7. (*Метод трапеций*). Пусть $f \in C^2[a,b]$ (т.е. f — дважды дифференцируемая функция на $[a,b]$, вторая производная которой непрерывна). Для каждого n разобьем $[a,b]$ на n равных частей точками $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, и рассмотрим кусочно-линейную функцию h_n, график которой над каждым отрезком разбиения $[t_k, t_{k+1}]$ представляет собой отрезок с концами $(t_k, f(t_k))$ и $(t_{k+1}, f(t_{k+1}))$. Докажите, что

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b h_n(t)\,dt\Big| < M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где $M_2 = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.

Задача 8. Докажите *формулу интегрирования по частям*:

1) если u, v — дифференцируемые функции, то $\int u'v\,dx = uv - \int vu'dx$;

2) если $u, v \in C^1[a,b]$, то $\int_a^b u'v\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vu'dx$.

Задача 9. Докажите следующие формулы:

1) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{const} \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1);$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln|x| + \mathrm{const}_1 & \text{при } x > 0; \\ \ln|x| + \mathrm{const}_2 & \text{при } x < 0; \end{cases}$

3) $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathrm{const}; \int \cos x\, dx = \sin x + \mathrm{const};$

4) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathrm{const} \quad (a > 0,\ a \neq 1);$

5) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + \mathrm{const}; \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + \mathrm{const};$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \mathrm{const}; \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \mathrm{const};$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsh} x + \mathrm{const} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \mathrm{const}.$

Задача 10. Докажите, что любая рациональная функция представима в виде суммы многочлена и нескольких рациональных функций вида $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$ (где $A, B, C, a, p, q \in \mathbb{R}$ и $p^2 - 4q < 0$).

Задача 11. Пусть $c > b^2$ и $\Delta = \sqrt{c - b^2}$. Положим $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2bx+c)^n}$. Докажите, что

$$I_1 = \frac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+b}{\Delta}\right)}{\Delta} + \mathrm{const},$$

$$I_n = \frac{x+b}{2\Delta^2(n-1)(x+2+2bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2\Delta^2(n-1)} I_{n-1} + \mathrm{const} \quad \text{при } n > 1;$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2bx+c| - bI_1 + \mathrm{const};$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+2bx+c)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+2bx+c)^{n-1}} - bI_n + \mathrm{const}.$$

Задача 12. Найдите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; **2)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; **3)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$; **4)** $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$; **5)** $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$;

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$; **7)** $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^4 x}$; **8)** $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$; **9)** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$;

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{((x-1)(x+1)^2)^{1/3}}$.

Задача 13. Пусть R — рациональная функция двух переменных. Придумайте способ, позволяющий вычислять интегралы вида **1)** $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$; **2)** $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$; **3)** $\int R(x, \sqrt{1+x^2})\, dx$; **4)** $\int R(x, \sqrt{x^2+x^3})\, dx$.

Указание (рациональная параметризация кривых). Нарисуйте гиперболу $x^2 - y^2 = 1$, проведите через ее точку $(1, 0)$ прямую под углом φ к оси Ox и выразите координаты (x, y) точки на гиперболе как рациональные функции от $t = \operatorname{tg}\varphi$.

Задача 14. Вычислите $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.