Формула Тейлора. Гладкие функции

Задача 1. Пусть f — функция, определенная в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, причём

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0).$$

Найдите $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Выведите отсюда единственность разложения Тейлора функции f.

Задача 2. Докажите существование следующих разложений Тейлора при $x \to 0$.

1) $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \cdots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + o(x^n); \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$

2) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$

3) $\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$

4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$

5) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$

6) $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$

Задача 3. Напишите разложения Тейлора (до n-го члена) при $x \to 0$ для следующих функций: **1)** $\ln(1+x)$; **2)** $\operatorname{arctg} x$; **3)** $\arcsin x$; **4)** $\frac{1}{1-3x+2x^2}$.

Задача 4. Выпишите первые три члена в разложении Тейлора при $x \to 0$ для следующих функций: **1)** $\frac{1}{\cos x}$; **2)** $e^{\sin x}$; **3)** $\sqrt{\cos x}$.

Задача 5. Как выражаются разложения Тейлора функций $f + g$, fg, f^{-1} и $f \circ g$ через разложения Тейлора функций f и g?

Задача 6. Найдите недостающие члены разложения Тейлора функции arctg при $x \to +\infty$:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \quad ??? \quad + o\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

Задача 7. Найдите неизвестные A, B, α, β ($\alpha > 0,\ \beta \geqslant \alpha + 1$) в разложении функции arcsin при $x \to 1 - 0$:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} + A(1-x)^\alpha + B(1-x)^\beta + o\big((1-x)^\beta\big).$$

Задача 8. Пусть $D = \frac{d}{dt} : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ — оператор дифференцирования. Определите оператор $e^D : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$. Придумайте формулу, позволяющую продолжить этот оператор до линейного оператора в пространстве $C(\mathbb{R})$.

Задача 9. Вычислите следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{1/x} - \sqrt{x^6 + x^3}\Big)$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}$.

Задача 10. Найдите рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов a_k в разложении

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n) \qquad (x \to 0).$$

(*Указание*: $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1$.) Докажите, что все a_k — целые неотрицательные числа.

Задача 11. Докажите, что формула Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа справедлива и без предположения о непрерывности функции $f^{(n)}$.

Задача 12. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, причем на некотором отрезке f имеет бесконечно много нулей. Докажите, что $\sup\limits_{n \geqslant 0,\, x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| = \infty$.

Задача 13. 1) Пусть $f(x) = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Найдите все производные функции f в нуле.
2) Для произвольного $a > 0$ постройте функцию $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, не равную нулю тождественно и такую, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| > a$.
3) Для произвольного отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ постройте такую функцию $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $f(x) = 1$ на отрезке $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, $f(x) = 0$ вне отрезка $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если она обращается в нуль вне некоторого отрезка.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *кусочно непрерывной*, если на любом отрезке она имеет лишь конечное число разрывов первого рода.

Определение. Пусть $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — кусочно непрерывные функции, причем одна из них финитна. *Свёрткой* f и g называется функция

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) g(x - t) dt.$$

Задача 14. (*Свойства свёртки*).
1) Докажите, что $f * g$ непрерывна для любых кусочно непрерывных f, g.
2) Докажите, что $f * g = g * f$.
3) Пусть $g \in C^n(\mathbb{R})$. Докажите, что $f * g \in C^n(\mathbb{R})$ и $f * g^{(k)} = (f * g)^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Задача 15. (*Сглаживание пеньков*).
1) Для произвольного $\varepsilon > 0$ постройте такую функцию $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\varphi_\varepsilon \geqslant 0$, $\varphi_\epsilon = 0$ вне отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$, и $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t) dt = 1$.

В следующих пунктах f — кусочно непрерывная функция.
2) Докажите, что $(f * \varphi_\varepsilon)(x) \to f(x)$ при $\varepsilon \to 0$, если f непрерывна в x.
3) Докажите, что сходимость из п. 5 является равномерной на любом отрезке, в окрестности которого f непрерывна.
4) Пусть все φ_ε чётны (покажите, что этого можно добиться). Куда стремится $(f * \varphi_\varepsilon)(x)$ при $\varepsilon \to 0$ в точках разрыва f?
5) Сделайте п. 3 задачи 13 при помощи свёртки.