Плоские параметризованные кривые

Задача 1. Постройте следующие кривые:

1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$; **2)** $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^5 \end{cases}$; **3)** $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^4 + t^6 + t^7 \end{cases}$; **4)** $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$;

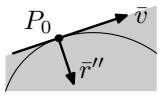
5) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$; **6)** $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$; **7)** $\begin{cases} x = 2t^3 - 3t \\ y = t^4 - t^2 \end{cases}$; **8)** $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$;

9) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{t^3+1} \\ y = \dfrac{3t^2}{t^3+1} \end{cases}$; **10)** $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$; **11)** $\begin{cases} x = t^3 - t^2 \\ y = t^4 - t^3 \end{cases}$.

Пусть $\bar{r}(s) = \big(x(s), y(s)\big)$ — параметризованная кривая класса C^1 на плоскости. Обозначим через $\bar{v}(s) = \bar{r}'(s) = \big(x'(s), y'(s)\big)$ вектор скорости этой кривой.

Определение. Параметризация кривой называется *натуральной*, если длина вектора скорости $\bar{v}(s)$ тождественно равна единице на всей кривой ($|\bar{v}| \equiv 1$). (В качестве примера приведём окружность с натуральной параметризацией: $\bar{r}(s) = (\cos s, \sin s)$.)

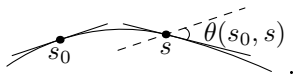
Задача 2. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(t)$ — параметризованная кривая, причём вектор скорости r' ни в какой точке не обращается в нуль. Докажите, что на этой кривой можно ввести натуральную параметризацию.

Задача 3. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(s)$ — кривая с натуральной параметризацией. Докажите, что
1) вектор скорости $\bar{r}'$ ортогонален вектору ускорения $\bar{r}''$;
2) если в некоторой точке s_0 ускорение $\bar{r}''$ не равно нулю, то вектор $P_0 + \bar{r}''$ и кусок кривой в некоторой окрестности точки s_0 лежат по одну сторону от касательной: 

.

Определение. Если $\bar{r}'' \neq 0$ в точке s_0, то вектор $\bar{n} = \dfrac{\bar{r}''}{|\bar{r}''|}$ называется *вектором нормали* к данной кривой в точке s_0.

Определение. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(s)$ — кривая с натуральной параметризацией. Зафиксируем точку $P_0 = \bar{r}(s_0)$ и обозначим через $\theta(s_0, s)$ угол между касательными к кривой в точках P_0 и $P = \bar{r}(s)$ (см. рис.):



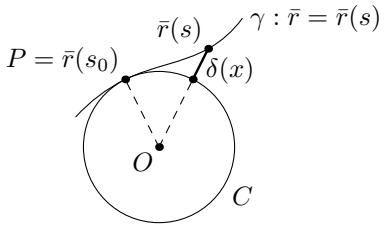
.

Если существует предел $\lim\limits_{s \to s_0} \dfrac{\theta(s_0, s)}{s - s_0}$, то он называется *кривизной* данной кривой в точке s_0 и обозначается через $k(s_0)$.

Задача 4. 1) Докажите, что если параметризация кривой натуральная, то $k(s) = |\bar{r}''(s)|$.
2) Найдите формулу для кривизны в случае произвольной параметризации.

Задача 5. Опишите все кривые, кривизна которых **а)** нулевая; **б)** * постоянная.

Задача 6. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(s)$ — кривая с натуральной параметризацией. Зафиксируем точку $P_0 = \bar{r}(s_0)$, возьмем произвольную точку O и построим окружность C с центром в O. Для каждого s положим $P = \bar{r}(s)$ и отметим на прямой PO точку Q, лежащую на C (при этом берем ту из точек пересечения, которая ближе к P). Положим $\delta(s) = |PQ|$.



Что означает условие **1)** $\delta(s) = o(1)$ при $s \to s_0$; **2)** $\delta(s) = o(s - s_0)$ при $s \to s_0$?

Определение. Окружность C называется *соприкасающейся* с кривой $\bar{r} = \bar{r}(s)$ в точке s_0, если $\delta(s) = o\big((s - s_0)^2\big)$ при $s \to s_0$.

Задача 7. Пусть кривизна кривой γ отлична от нуля в некоторой точке s_0. Докажите, что у кривой γ существует единственная соприкасающаяся окружность в точке s_0; при этом вектор $\overline{PO}$ сонаправлен вектору $\bar{n}(s_0)$, и $|\overline{PO}| = \dfrac{1}{k(s_0)}$.

Определение. *Эволютой* кривой γ называется геометрическое место центров ее соприкасающихся окружностей.

Задача 8. Постройте эволюту эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.