Ряды–I

Задача 1. Докажите, что для всякой числовой последовательности существует ряд, частичные суммы которого образуют эту последовательность.

Задача 2. Докажите, что ряд $\sum a_i$ сходится тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ и всех $k \geqslant 0$ выполнено неравенство $|\sum\limits_{i=n}^{n+k} a_i| < \varepsilon$. В частности, если ряд сходится, то $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$.

Задача 3. Докажите, что если ряд $\sum a_i$ сходится, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ ряд $\sum \lambda a_i$ тоже сходится и его сумма равна $\lambda \sum a_i$; если, кроме того, ряд $\sum b_i$ сходится, то ряд $\sum(a_i + b_i)$ тоже сходится и его сумма равна $\sum a_i + \sum b_i$.

Задача 4. Докажите, что ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.

Задача 5. Не используя интегральный признак, исследуйте следующие ряды на сходимость:
1) $\sum\limits_n \dfrac{1}{n}$; **2)** $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^{1+\delta}}$ $(\delta > 0)$; **3)** $\sum\limits_n \dfrac{1}{n \ln n}$; **4)** $\sum\limits_n \dfrac{1}{n \ln(\ln n)}$.

Задача 6. Исследуйте следующие ряды на сходимость:

1) $\sum\limits_n \dfrac{x^n n!}{n^n}$ $(x \geqslant 0)$; **2)** $\sum\limits_n \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; **3)** $\sum\limits_n \left(\dfrac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$; **4)** $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^p}$.

Задача 7. Придумайте такую последовательность $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots \to 0$, что ряд $\sum\limits_n \dfrac{1}{n^{1+\alpha_n}}$ **1)** сходится; **2)** расходится.

Задача 8. Исследуйте следующие ряды на сходимость:
1) $\sum\limits_n \dfrac{1}{n \ln^p n}$; **2)** $\sum\limits_n \dfrac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$; **3)** $\sum\limits_n \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \dfrac{n+1}{n}}\right)$;
4) $\sum\limits_n \dfrac{|\cos 2^n|}{n}$; **5)** $\sum\limits_n \dfrac{\cos n}{n}$.

Задача 9. Пусть

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если в десятичной записи } n \text{ нет } 7 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Сходится ли ряд $\sum\limits_n \dfrac{\chi(n)}{n}$?

Задача 10. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Докажите, что

$$\text{ряд } \sum_n a_n \text{ сходится} \iff \text{ряд } \sum_n 2^n a_{2^n} \text{ сходится.}$$