Ряды–II. Гипергеометрическая функция

Задача 1. Докажите, что члены условно сходящегося ряда можно переставить так, чтобы его частичные суммы стремились **1)** к $+\infty$; **2)** к $-\infty$.

Задача 2. Пусть ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ абсолютно сходятся. Докажите, что ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$ также абсолютно сходится (при любой нумерации его членов) и что его сумма равна $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j\right)$.

Задача 3.* Чему может быть равна сумма условно сходящегося ряда комплексных чисел после перестановки его членов?

Задача 4. Пусть

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n$$

(где $\alpha, \beta, \gamma, x > 0$).

1) Докажите, что функция $\omega(x) = F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ удовлетворяет *гипергеометрическому уравнению*

$$x(1-x)\omega'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\omega' - \alpha\beta\omega = 0.$$

Докажите следующие равенства:

2) $(1+z)^n = F(-n,1,1,-z)$; **3)** $\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = 2zF\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2},z^2\right)$;

4) $\ln(1+z) = zF(1,1,2,-z)$; **5)** $\arcsin z = zF\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},z^2\right)$;

6) $\operatorname{arctg} z = zF\left(\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2},-z^2\right)$; **7)** $\exp(z) = \lim\limits_{b\to\infty} F\left(1,b,1,\dfrac{z}{b}\right)$.