Экзамен

Предупреждение. Все вычисления, использованные при решении задач, должны присутствовать в работе. В частности, если в задаче 2 будет построена кривая, но не будет объяснено, почему она именно такая, то решение засчитано не будет.

Задача 1. Вычислите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos(x^2) + \sqrt[6]{1+3x^4} - 1}{(\sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{e^{-x^2}})\sin(x^2)\operatorname{tg}(e^{x^2}-1)}.$$

Задача 2. Постройте кривую

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{(t-4)^2}{t-2} \\ y(t) = \dfrac{(t+4)^2}{t+2} \end{cases}$$

Задача 3. **1)** Найдите множество E всех $x \in \mathbb{R}$, при которых сходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) x \right)^n.$$

2) Равномерно ли сходится этот ряд на E?

Задача 4. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ заданы условиями

$$x_1 = a > 0, \quad y_1 = b > 0, \quad z_1 = c > 0,$$
$$x_n = \sqrt{y_{n-1}z_{n-1}}, \quad y_n = \sqrt{x_{n-1}z_{n-1}}, \quad z_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}.$$

Имеют ли эти последовательности пределы? Если да, то найдите их.

Задача 5. Постройте строго возрастающую функцию $f \in C^1[0,1]$, производная которой имеет на $[0,1]$ бесконечно много нулей.

Задача 6. Функция $y = y(x)$ задана при $x > 0$ условиями $y^6 - x^3y^2 - x^5 = 0$ и $y \geqslant 0$.
1) Докажите, что такая функция существует и единственна.
2) Докажите непрерывность этой функции.
3) Вычислите интеграл

$$\int_{4/27}^{2} \frac{y(x)}{x^2}\,dx.$$

Замечание. Теоремой о неявной функции пользоваться нельзя! Считается, что вы ее еще не знаете.

Задача 7. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$, и пусть для каждого $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$f(x) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}.$$

Докажите, что $f(x) = ax + b$ для постоянных $a, b \in \mathbb{R}$.