Контрольная работа–1

Задача 1. Пусть f — дважды дифференцируемая на интервале функция, обладающая обратной, причем $f'(x) \neq 0$ ни в одной точке. Докажите, что f^{-1} дважды дифференцируема, и найдите $(f^{-1})''(y)$.

Задача 2. Вычислите пределы:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+3n-1}}{\ln(1+n)-\ln(2+n)}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\operatorname{arctg}(\sin^2 x)}$.

Задача 3. Для каких $x \in \mathbb{R}$ существуют пределы:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\sin(\ldots\sin x))\ldots)$ (n скобок); **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\cos(\ldots\cos x))\ldots)$ (n скобок)?

Задача 4. Постройте такую последовательность $\{x_n\}$, $x_n > 0$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n^{0{,}99}} = +\infty$.

Задача 5. Докажите, что множество $\{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathbb{Z}\}$ плотно в $\mathbb{R}$ (это означает, что оно пересекается с любым непустым интервалом).

Задача 6. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, равномерно сходящаяся на интервале (a,b) к функции f. Докажите, что f продолжается до непрерывной функции $\tilde{f}$ на $[a,b]$, и f_n равномерно сходится к $\tilde{f}$ на $[a,b]$.

Задача 7. Пусть $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность. Опишите все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, удовлетворяющие условию $f(x+y) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 8. Пусть $f \in C^1(0,+\infty)$ (это означает, что f дифференцируема на $(0,+\infty)$ и ее производная непрерывна на $(0,+\infty)$), и пусть $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = a$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ и f' равномерно непрерывна на $(0,+\infty)$.