Контрольная работа–2 (домашняя)

Задача 1. Вычислите интегралы:

$$1)\ \int \operatorname{tg} x\,dx;\quad 2)\ \int \frac{dx}{\cos^4 x};\quad 3)\ \int \frac{dx}{x^3+x^2+x+1};\quad 4)\ \int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^{15}};$$

$$5)\ \int x^3 e^{-x^2} dx;\quad 6)\ \int e^{ax}\cos bx\,dx;\quad 7)\ \int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x};$$

$$8)\ \int \frac{\sin x\cos x\,dx}{1+\sin^4 x};\quad 9)\ \int \frac{dx}{(1+e^x)^2};\quad 10)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

Задача 2. Пусть f — непрерывная функция на $[0,\pi]$. Докажите, что

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

Определение. Говорят, что функция f *выпукла вверх* на отрезке $[a,b]$, если для всех $x,y\in[a,b]$ и всех $\lambda,\mu\in[0,1]$ таких, что $\lambda+\mu=1$, выполнено $f(\lambda x+\mu y)\geqslant \lambda f(x)+\mu f(y)$ (т.е. если отрезок, соединяющий точки $(x,f(x))$ и $(y,f(y))$, находится ниже, чем график f на отрезке $[x,y]$).

Задача 3. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Докажите, что для ее выпуклости вверх достаточно, чтобы условие предыдущего определения выполнялось для $\lambda=\mu=1/2$.

Задача 4. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Докажите, что f выпукла вверх тогда и только тогда, когда для каждого отрезка $[x-h,x+h]\subset[a,b]$ выполнено неравенство $f(x)\geqslant \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$.

Определение. Кривая C на плоскости задана параметрически: $t\mapsto(x(t),y(t))$, где $x,y\in C^1[a,b]$. Для каждого разбиения $\tau=\{a=t_0<t_1<\dots<t_n=b\}$ отрезка $[a,b]$ обозначим через $L(\tau)$ длину ломаной с вершинами в точках $(x(t_i),y(t_i))$, $i=0,\dots,n$. Положим также $\lambda(\tau)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i-t_{i-1})$. Число L называется *длиной* кривой C, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любого разбиения τ, удовлетворяющего условию $\lambda(\tau)<\delta$, справедливо неравенство $|L-L(\tau)|<\varepsilon$.

Задача 5. Докажите, что длина кривой C вычисляется по формуле

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt.$$

Задача 6. Колесо радиуса R катится без проскальзывания. Найдите длину пути, который проходит точка колеса, находящаяся на расстоянии R от его центра, за один полный оборот.