1. Найти интеграл $\int\limits_M \omega$, где
$$\omega = (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$
а M задано уравнениями
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx,\ x^2 + y^2 = 2Rx$$
2. Докажите, что любая группа Ли ориентируема.
3. Вычислите производную Ли дифференциальной формы
$$ydx \wedge dy + xdy \wedge dz + (x^2 + y^2 + z^2)dz \wedge dx$$
вдоль векторного поля $(x + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y + z^2)\frac{\partial}{\partial y} + (z + x^2)\frac{\partial}{\partial z}$.
4. Найдите когомологии бутылки Клейна.
5. Пусть M^n – гиперповерхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Для произвольной ориентированной прямой l, на которой выбрано начало отсчёта, в $\mathbb{R}^{n+1}$ положим $f_l(x)$ – функция, равная координате проекции точки x на прямую l. Докажите, что существует такая l, что $f_l(x)$ есть функция Морса на M^n.
6. Для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^3$ векторное поле вращения X_v с угловой скоростью v задается формулой $X_v(A) = [v, A]$ (векторное произведение). Пусть u, v – некоторые вектора в $\mathbb{R}^3$. Чему равна производная Ли $L_{X_u} X_v$?
7. Докажите, что на 4-мерной сфере нельзя ввести симплектическую структуру.
8. Рассмотрим отображение а) $f\colon \mathbb{CP}^3 \to \mathbb{CP}^3$; б) $f\colon \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^3$, заданное формулой $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)$. Найдите
$$\left(\int\limits_M f^*\omega\right) \Big/ \left(\int\limits_M \omega\right)$$
где $M = \mathbb{CP}^3(\mathbb{RP}^3)$, а ω – форма объёма на M.
9. Единичная решётка на плоскости – это такая подгруппа $\mathbb{R}^2$, что площадь параллелограмма, натянутого на некоторые два вектора решётки, равна 1, а меньше 1 быть не может.
   (a) Доказать, что множество единичных решёток на плоскости является многообразием.
   (b) Доказать, что на нём имеется нигде не обращающаяся в нуль 2-форма.
10. Пусть F_λ, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ — семейство (гладких) отображений $S^2 \to S^2$. При каких m можно гарантировать, что в семействе F_λ общего положения нет отображений F_λ, для которых существует точка с $dF_\lambda = 0$? При каких m можно гарантировать, что в семействе F_λ общего положения нет отображений F_λ, для которых существует точка с $dF_\lambda = 0$, $d^2F_\lambda = 0$, $d^3F_\lambda = 0$? (Можно понимать i-ый дифференциал d^iF_λ как набор i-ых частных производных всех компонент отображения F_λ в некоторой локальной системе координат.)