Гомологии Хованова – User's Guide

А. Кустарев

1 Что это?

Гомологии Хованова $Kh^{i,j}(L)$ узла или ориентированного зацепления L – это группы гомологий биградуированного цепного комплекса $CKh^{i,j}(L)$, строящегося по некоторой плоской диаграмме L. Дифференциал в этом комплексе имеет бистепень $(1,0)$. Соответствующие комплексы различных диаграмм одного зацепления квазиизоморфны, поэтому гомологии Хованова являются инвариантом зацепления L.

Если L – узел, то его гомологии Хованова не зависят от ориентации. Если L – ориентированное зацепление, то при изменении ориентаций одной или нескольких компонент L гомологии Хованова практически не меняются, происходит лишь сдвиг по градуировкам.

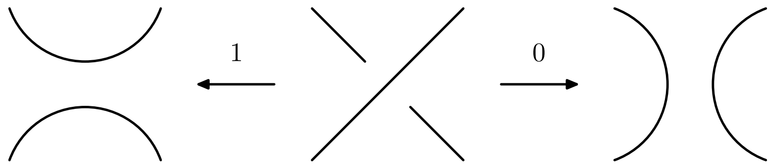
Основной факт о гомологиях Хованова состоит в том, что их градуированная эйлерова характеристика совпадает с (ненормализованным) полиномом Джонса:

$$\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}(-1)^i \dim Kh^{i,j}(L)q^j = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}(-1)^i \dim CKh^{i,j}(L)q^j = \tilde{J}(L).$$

Гомологии Хованова были определены в [1]. Большую известность получила работа [2], где, в частности, вычислены гомологии Хованова всех узлов с менее, чем 11 перекрестками. На английском языке есть очень хорошие лекции [3], а также более современные [4]. В работе [5] при помощи гомологий Хованова была доказана гипотеза Милнора о роде торического узла (первое неаналитическое доказательство этого утверждения).

2 Определения

Рассмотрим плоскую диаграмму D ориентированного зацепления L, пересечения которой занумерованы числами от 1 до k. Тогда каждой вершине k-мерного куба $\{0,1\}^k$ можно сопоставить разрешение диаграммы D, в котором каждый перекресток разрешается по следующему правилу:



Если v – вершина куба $\{0,1\}^k$, то мы будем обозначать соответствующее разрешение диаграммы также за v. При этом определении каждому ребру куба разрешений соответствует морсовская перестройка индекса 1 (седло) между соответствующими разрешениями. Все ребра куба считаются ориентированными: если вершины v_0 и v_1 различаются только в одной координате, то ребро ведет в ту вершину, в которой больше единиц.

Конструкция Хованова сопоставляет каждой вершине v векторное пространство $A(v)$, а каждому ребру $e : v_0 \to v_1$ – линейное отображение $A_e : A(v_0) \to A(v_1)$ следующим образом. Пусть $V = < v_-, v_+ >$ – двумерное векторное пространство над $\mathbb{Q}$, на котором заданы две операции m и Δ – умножение и коумножение:

$$m(v_- \otimes v_-) = 0$$
$$m(v_- \otimes v_+) = m(v_+ \otimes v_-) = v_-$$
$$m(v_+ \otimes v_+) = v_+$$
$$\Delta(v_-) = v_- \otimes v_-$$
$$\Delta(v_+) = v_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_-$$

Хотя это не имеет прямого отношения к дальнейшей конструкции, отметим, что V является алгеброй Фробениуса с единицей v_+ – и следовательно, дает пример $(1+1)$-мерной $TQFT$. Но при этом V не является алгеброй Хопфа.

Вернемся к построению гомологий. Пусть $c(v)$ – число окружностей в разрешении v диаграммы D. Мы определяем $A(v)$ как векторное пространство $V^{\otimes c(v)}$. Каждая перестройка индекса 1, соответствующая ребру, изменяет число окружностей на 1: либо какая-то окружность разрешения распадается на две, либо две сливаются в одну. Мы полагаем A_e тождественным на тензорных сомножителях, соответствующих окружностям, не затрагиваемым перестройкой. Если две окружности разрешения сливаются в одну, то A_e действует на двух соответствующих сомножителях умножением m, если одна окружность распадается на две – то Δ.

Мы определяем комплекс $CKh(D)$ как прямую сумму пространств $A(v)$ по всем вершинам $v \in \{0,1\}^k$, а дифференциал d – по правилу

$$d(x) = \sum_{v-\textit{начало}\, e_i} (-1)^{s(e_i)} A_{e_i}(x).$$

Здесь x лежит в пространстве $A(v)$, суммирование ведется по всем ребрам куба e_i, выходящим из вершины v, а число $s(e_i)$ равно числу единиц в координатах v слева от координаты, меняющейся при проходе ребра e_i.

Непосредственно проверяется, что $d^2 = 0$. Отметим, что до сих пор ориентация зацепления L никак не участвовала в определении.

Пусть n_+ и n_- – число положительных и отрицательных перекрестков в диаграмме D. Мы определяем гомологическую градуировку $grad(x)$ по правилу

$$grad(x) = |v| - n_-,$$

где $x \in A(v)$, $|v|$ – число единиц среди координат v.

Дифференциал d повышает $grad(x)$ на единицу. Оказывается, на $CKh(D)$ можно ввести вторую градуировку, которую дифференциал d будет сохранять.

Пусть $p(v_\pm) = \pm 1$. Распространим p на $V^{\otimes i}$ по правилу

$$p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) = p(v_1) + \ldots + p(v_i).$$

Если x – однородный относительно p элемент $CKh(D)$, то d понижает $p(x)$ на единицу. Поэтому сумма $p(x) + grad(x)$ должна сохраняться. Определим вторую градуировку $q(x)$ по формуле

$$q(x) = p(x) + grad(x) + n_+ - n_-.$$

Мы определяем гомологии Хованова $Kh^{i,j}(L)$ как гомологии комплекса $CKh(D)$, с учетом градуировок $i = grad(x)$ и $j = q(x)$. Дифференциал d имеет бистепень $(1, 0)$.

Слагаемые n_+ и n_- в определения градуировок добавляются для того, чтобы гомологии $Kh^{i,j}(L)$ не менялись при движениях Рейдемейстера.

Теорема 2.1. Если D_1 и D_2 – диаграммы одного зацепления L, то гомологии комплексов $CKh(D_1)$ и $CKh(D_2)$ изоморфны.

Это неочевидное утверждение; оригинальное доказательство его имеется в [1], адаптированное, которое может быть разобрано за одну лекцию – в [2]. Доказательство состоит в проверке квазиизоморфности комплексов диаграмм D_1 и D_2, связанных одним из трех движений Райдемайстера.

3 Свойства

Перечислим некоторые свойства $Kh^{i,j}(L)$.

Предложение 3.1. Для тривиального узла U мы имеем $Kh^{0,1}(U) \simeq Kh^{0,-1}(U) \simeq \mathbb{Q}$, при всех остальных значениях i и j $Kh^{i,j}(U) = 0$.

Предложение 3.2 (формула Кюннета). Для объединения $L_1 \sqcup L_2$ мы имеем $Kh(L_1 \sqcup L_2) = Kh(L_1) \otimes Kh(L_2)$.

В частности, $Kh(K \sqcup U)$ – это удвоение $Kh(K)$ со сдвигом q-градуировки вверх и вниз на единицу и без изменения гомологической градуировки.

Предложение 3.3. При изменении ориентации одной из компонент зацепления гомологии Хованова не изменяются, за исключением сдвига по градуировкам.

Доказательства этих трех предложений остаются в качестве упражнения; определите сдвиг по градуировкам в предложении 3.3.

Самый большой интерес представляет следующее утверждение.

Теорема 3.4. Эйлерова характеристика $\sum\limits_{i,j}(-1)^i \dim Kh^{i,j}(L)q^j$ комплекса $CKh^{i,j}(L)$ совпадает с полиномом Джонса зацепления L.

Мы вернемся к нему позднее.

Пусть $\bar{L}$ – зеркальный образ зацепления L (отражение относительно плоскости в $\mathbb{R}^3$).

Предложение 3.5. Имеет место изоморфизм $CKh(\bar{L}) = (CKh(L))^*$. В частности, $Kh^{i,j}(\bar{L}) = Kh^{-i,-j}(L)$.

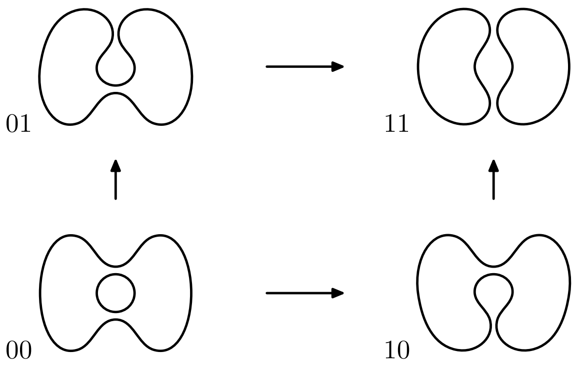
Напомним, что если $A = \big(\ldots \to A^{i,j} \to A^{i+1,j} \to \ldots\big)$ – биградуированный цепной комплекс, то сопряженный комплекс B определяется как $\big(\ldots \to (A^{i+1,j})^* \to (A^{i,j})^* \to \ldots\big) = \big(\ldots \to B^{-i-1,-j} \to B^{-i,-j} \to \ldots\big)$.

Заметим, что имеется изоморфизм $r : (V, \Delta, m) \to (V^*, m^*, \Delta^*)$, действующий по формуле $v_\pm \to (v_\mp)^*$. Каждое разрешение v диаграммы L соответствует однозначно некоторому разрешению $\bar{v}$ симметричной диаграммы $\bar{L}$. Если $x \in A(v)$ – некоторый моном, то мы сопоставляем ему моном $R(x) \in A(\bar{v})$, полученный применением r ко всем тензорным сомножителям в x. Распространим теперь отображение R по линейности на весь комплекс зацепления L.

Упражнение. Докажите, что R индуцирует изоморфизм между $CKh(\bar{L})$ и $(CKh(L))^*$.

4 Вычисление для зацепления Хопфа

Вычислим гомологии Хованова зацепления Хопфа H.



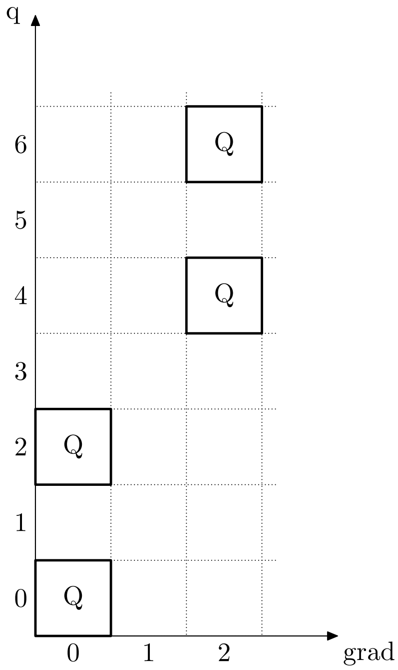
Куб разрешений в этом случае – квадрат, $n_+ = 2$, $n_- = 0$. В гомологической градуировке 0 имеется единственная вершина $v = (00)$, $A(00) \simeq V \otimes V$, ядро порождено элементами $v_- \otimes v_-$ и $v_+ \otimes v_- - v_- \otimes v_+$. Следовательно, $Kh^{0,0}(H) \simeq Kh^{0,2}(H) \simeq \mathbb{Q}$, $Kh^{0,i}(H) = 0$ при $i \neq 0, 2$.

В гомологической градуировке 1 ядро совпадает с образом. Общий элемент $x \in CKh^{1,j}(H)$ имеет вид (f, g), где $f \in A(01)$, $g \in A(10)$, причем оба векторных пространства $A(01)$ и $A(10)$ изоморфны V. Дифференциал d отображает $A(01)$ и $A(10)$ в пространство $A(11)$, изоморфное $V \otimes V$.

Имеем $d((v_-, 0)) = -d((0, v_-)) = v_- \otimes v_-$, $d((v_+, 0)) = -d((0, v_+)) = v_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_-$. Поэтому в гомологической градуировке 1 ядро d совпадает с образом.

Наконец, в гомологической градуировке 2 имеем $d[A(11)] = 0$, а фактор $A(11)/Im\, d$ порождается векторами $v_+ \otimes v_+$ и $v_+ \otimes v_- - v_- \otimes v_+$. Тем самым, $Kh^{2,4}(H) \simeq Kh^{2,6}(H) \simeq \mathbb{Q}$, $Kh^{2,i}(H) = 0$ при $i \neq 4, 6$.

Схематически $Kh^{i,j}(H)$ можно изобразить следующим образом:



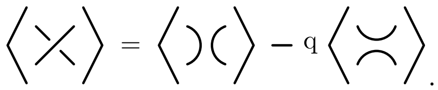
Упражнение. Вычислите гомологии Хованова трилистника.

5 Полином Джонса и скобка Кауфмана

Скобка Кауфмана $< D >$ – инвариант диаграммы D зацепления L, являющийся полиномом Лорана от одной переменной q. Один из возможных способов ее определения – рекурсивный:

1. $<k$ окружностей $>= (q+q^{-1})^k$

2. Имеет место скейн-соотношение Кауфмана:



Скобка Кауфмана не инвариантна при движениях Райдемайстера, но полином

$$\tilde{J}(D) = (-1)^{n_-} q^{(n_+ - 2n_-)} < D >,$$

уже является корректно определенным инвариантом узла или ориентированного зацепления L. Отметим, что ориентация L не использовалась при определении скобки Кауфмана.

Полином $\tilde{J}(L) = \tilde{J}(D)$ называют (ненормализованным) полиномом Джонса. Нормализованный полином Джонса $J(L)$ равен $\frac{\tilde{J}(L)}{q+q^{-1}}$.

Упражнение. Докажите теорему 3.4.

6 Длинная точная последовательность

Пусть L_0 и L_1 – зацепления, полученные из зацепления L разрешениями некоторого перекрестка. Тогда цепной комплекс Хованова $CKh(L_1)$ вложен в комплекс $CKh(L)$ и замкнут в $CKh(L)$ относительно действия дифференциала d. Отметим, что для $CKh(L_0)$ аналогичное утвеждение неверно.

Возникает короткая точная последовательность цепных комплексов

$$0 \to CKh(L_1) \to CKh(L) \to CKh(L_0) \to 0,$$

индуцирующая длинную точную последовательность групп гомологий

$$\ldots \to Kh(L_1) \to Kh(L) \to Kh(L_0) \to Kh(L_1) \to \ldots$$

Расставим градуировки в этой длинной точной последовательности. Для этого нужно, в частности, определить, как связаны числа перекрестков n_+ и n_- у зацеплений L, L_0 и L_1.

Случай 1: разрешаемый перекресток – отрицательный. Тогда его ориентированное разрешение является 1-разрешением, и зацепление L_1 обладает согласованной с L ориентацией. Следовательно, $n_+(L_1) = n_+(L)$, $n_-(L_1) = n_-(L) - 1$.

Для L_0 нет канонической ориентации, поэтому ориентируем L_0 произвольным образом. Пусть $c = n_-(L_0) - n_-(L)$.

Тогда короткая точная последовательность комплексов имеет вид

$$0 \to CKh^{i,j+1}(L_1) \to CKh^{i,j}(L) \to CKh^{i-c,j-3c-1}(L_0) \to 0$$

(вспомните определения i – гомологической градуировки и j – q-градуировки). Соответствующая длинная точная последовательность имеет вид

$$\ldots \to Kh^{i,j+1}(L_1) \to Kh^{i,j}(L) \to Kh^{i-c,j-3c-1}(L_0) \to Kh(L_1)^{i+1,j+1} \to \ldots$$

Случай 2: разрешаемый перекресток – положительный. Тогда его ориентированное разрешение является 0-разрешением, и зацепление L_0 обладает согласованной с L ориентацией. Следовательно, $n_+(L_0) = n_+(L) - 1$, $n_-(L_1) = n_-(L)$.

Для L_1 нет канонической ориентации, поэтому ориентируем L_1 произвольным образом. Пусть $c = n_-(L_1) - n_-(L)$.

Тогда короткая точная последовательность комплексов имеет вид

$$0 \to CKh^{i-c-1,j-3c-2}(L_1) \to CKh^{i,j}(L) \to CKh^{i,j-1}(L_0) \to 0$$

Соответствующая длинная точная последовательность имеет вид

$$\ldots \to Kh^{i-c-1,j-3c-2}(L_1) \to Kh^{i,j}(L) \to Kh^{i,j-1}(L_0) \to Kh(L_1)^{i-c,j-3c-2} \to \ldots$$

Упражнение. Вычислите гомологии Хованова зацепления Хопфа, пользуясь лишь длинной точной последовательностью.

Смысл гомоморфизмов в длинной точной последовательности простой: $Kh(L_1) \to Kh(L)$ и $Kh(L) \to Kh(L_0)$ соответствуют вложению и факторизации, а гомоморфизм $Kh(L_0) \to Kh(L_1)$ вычисляется так: берем представителя $x \in CKh(L_0)$, вычисляем от него дифференциал в комплексе $CKh(L)$ и оставляем часть, лежащую в $CKh(L_1)$.

Упражнение. Вычислите гомологии Хованова трилистника, используя длинную точную последовательность.

Работы по теме

[1] Mikhail Khovanov. *A categorification of the Jones polynomial.* arXiv:math/9908171v2 [math.QA].

[2] Dror Bar-Natan. *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial.* Algebraic & Geometric Topology, Volume 2 (2002) 337-370.

[3] Paul Turner. *Five Lectures on Khovanov Homology.* arXiv:math/0606464v1 [math.GT].

[4] Marta Asaeda, Mikhail Khovanov. *Notes on Link Homology.* arXiv:math/0804.1279v1 [math.QA].

[5] Jacob Rasmussen. *Khovanov homology and the slice genus.* arXiv:math/0402131v1 [math.GT]