Листок 1

1. Имена и отчества 36 пассажиров вагона распределены независимо и случайно. Вероятность, что среди пассажиров есть Георгий Семёнович, равна $\frac{1}{10^4}$. Какова вероятность, что Георгий Семёнович Зеленов, купивший билет на поезд, встретит в вагоне полного тёзку (и в вагоне будет два Георгия Семёновича)? Больше $\frac{1}{5\times10^6}$ или меньше?

Замечание 1. $\frac{35}{36}\times\frac{1}{10^4}$ не является правильным ответом потому же, почему и 0.

2. Рассмотрим подбрасывание двух групп симметричных монеток — из $2m$ и из $2n$ штук, соответственно ($m > n$). Что вероятнее: что в первой группе доля монет, выпавших орлом вверх, будет больше отклоняться от $\frac{1}{2}$ или что во второй группе количество монет, выпавших орлом вверх, будет больше отклоняться от половины?

3. а) Докажите, что в любом вероятностном пространстве Ω любое событие положительной вероятности A можно сделать вероятностным пространством так, что для любых двух событий в нём $B, C \in A$ выполнено $p_A(B|C) = p_\Omega(B|C)$.

б) Докажите, что если в пространстве Ω событие A имеет вероятность 1, то для любого события B выполняется равенство $p(B|A) = p(B)$.

в) Верно ли, что если Ω — вероятностное пространство, $A \in \Omega$ — событие положительной вероятности, и $B, C \subset A$ — события, вложенные в A, причём в пространстве A они независимы, то и в пространстве Ω они независимы? Верно ли обратное? Верно ли, что если $p(A) > 0$ и A, B, C попарно независимы, то $B\cap A$ и $C \cap A$ независимы в пространстве A.

4. Рассмотрим $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим следующее распределение вероятностей $p(k) = a^{k-1}\dfrac{1-a}{1-a^6}$, где $0 < a \neq 1$. Являются ли в нём независимыми события “k чётно” и “k составное”, если $a = \sqrt{\frac{-2+\sqrt{7}}{2}}$? Если $a = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$?

5. Некоторое событие A имеет вероятность 10^{-6}. У нас имеется метод проверки того, что оно случилось, который даёт ответ "да" с вероятностью 1 при условии, что событие A случилось. При условии, что событие A не случилось, проверка даёт ложное срабатывание с вероятностью 10^{-4}. Какова вероятность события A, при условии, что проверка подтвердила, что событие произошло?

6. Пусть в некотором пространстве Ω фиксированы $A \subset B \subset \Omega$, $p(B \setminus A) \neq 0$. Могут ли A и B быть независимыми?

7. Двое играют в подбрасывание монеты до пяти побед (не обязательно подряд). Монета симметричная. Какая вероятность выигрыша первого игрока, при условии, что из первых пяти бросаний три раза победил первый и два раза победил второй?

8. Дано вероятностное пространство Ω, число $n \in \mathbb{N}$ и $3n$ случайных величин на пространстве Ω, задающих 3 вектора X, Y и Z в $\mathbb{R}^n$. Верно ли, что $P(Z \in < X, Y > |X \neq \lambda Y) > P(Z \in < X, Y > |X = \lambda Y)$.