Алгебра 1 семестр 2 занятие.

1. Пусть $c \in \mathbb{R}, c$. Докажите что $\mathbb{R}[x]/(x-c) = \mathbb{R}$.

2. Пусть $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Докажите что $\mathbb{R}[x]/(x^2-c^2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

3 . Пусть $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Докажите что $\mathbb{R}[x]/(x^2+c^2) = \mathbb{C}$.

4. Пусть R – кольцо (вещественнозначных) функций на отрезке $[-1, 1]$. Пусть a – точка этого отрезка. Положим $\mathcal{I}_a = \{f \in R | f(a) = 0\}$ – множество функций, зануляющихся в a. Докажите что $\mathcal{I}_a$ – идеал и $R/\mathcal{I}_a = \mathbb{R}$.

5. Пусть R – как в задаче 4. Пусть a – ненулевая точка этого отрезка. Положим $\mathcal{I}_{-a,a} = \{f \in R | f(-a) = f(a) = 0\}$ – множество функций, зануляющихся в a. Докажите что $\mathcal{I}_{-a,a}$ – идеал и $R/\mathcal{I}_{-a,a} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Ср. с задачей 2.

6. Пусть A – коммутативное кольцо а $\mathfrak{a}$ – идеал. Докажите что найдется кольцо B и отображение колец $f : A \to B$ такие что $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker} f$.

Рассмотрим множество $\mathcal{D}$ конечных сумм $p_0 + p_1\partial + p_2\partial^2 + p_N\partial^N$, p_i - многочлены от x с законом умножения

$$a\partial^k \circ b\partial^l = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} ab^{[i]} \partial^{(k-i+l)}$$

7. Докажите что $\mathcal{D}$ является ассоциативным и некоммутативным кольцом.