Алгебра 4

1. Пусть V - конечномерное пространство и $e_1, e_2, \cdots, e_n$ – его базис. Найдите "естественный"базис пространства линейных функционалов $V^\wedge$.

2. Обозначим как обычно через $V^\wedge$ пространство двойственное к векторному пространству V (пространство линейных функций на V). Вектор v из V задает функцию на $V^\wedge$ по правилу $\psi \to \psi(v)$. Докажите что эта функция линейна и мы получаем отображение V в дважды двойственное $(V^\wedge)^\wedge$. Докажите что это отображение линейно и что для конечномерного V это изоморфизм.

3. Пусть $(u_1, u_2, \cdots u_n)$ – набор из n векторов в n-мерном пространстве. Докажите что он линейно зависим титтк он не порождает все пространство.

Более точная формулировка предыдущей задачи требует некоторой подготовки:

4. Набор $(u_1, u_2, \cdots u_n)$ векторов в n-мерном пространстве линейно зависим титтк найдется ненулевой ковектор ψ зануляющийся на всех u_i.

Рангом набора векторов конечномерного пространства называется размерность пространства ими порожденного. Корангом набора векторов называется размерность пространства ковекторов зануляющихся на всех векторах набора (почему это векторное пространство)

5. Докажите что сумма ранга и коранга равна числе векторов в наборе.

6. Напомним что четностью $p(\sigma)$ перестановки σ называется четность количества нарушений порядка при этой перестановке: $\#\{(ij)|i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$. Докажите что четность композиции равна сумме четностей компонент: $p(\sigma_1 \circ \sigma_2) = p(\sigma_1) + p(\sigma_2)$.