Алгебра 5

Напомним, что рангом множества векторов называется количество векторов в максимальном подмножестве линейно независимых векторов. (Это определение отличается от определения из предыдущего листка, см задачу 1) Строчным (соответственно столбцовым) рангом матрицы называется ранг множества строк (соответственно столбцов) матрицы.

1. Докажите что ранг множества векторов равен размерности подпространства порожденного этим множеством векторов, так что определение корректно (не зависит от максимального подмножества).

2. Докажите что столбцовый ранг матрицы равен строчному.

Пусть $A = (a^i_j)$ - матрица размера $m \times n$. Пусть I (соответственно J) подмножество отрезка $[1, \cdots, m]$ (соответственно $[1, \cdots, m]$) мощности k. Рассмотрим совокупность $(a^i_j), i \in I, j \in J$; это квадратная матрица размера $k \times k$. Ее определитель называется (IJ)м k-*минором* матрицы A

3. Докажите что ранг матрицы не меньше k тогда и только тогда когда какой-нибудь k-минор не равен нулю.

4. Вычислите следующие определители

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1^{j-1} & x_2^{j-1} & \cdots & \cdots & x_n^{j-1} \\ x_1^{j+1} & x_2^{j+1} & \cdots & \cdots & x_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Здесь x_i^j обозначает j-ю степень переменной x_i.

5. Вычислите следующие определители

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

6. Вычислите следующие определители: а) $|(i+j-1)|_{i,j=1,n}$, б) $|\min(i,j)|_{i,j=1,n}$, в) $\left|\dfrac{(i+j)!}{i!j!}\right|_{i,j=1,n}$.

7. Вычислите $\begin{vmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$. Вам ответ ничего не напоминает?