Алгебра 1 семестр, занятие 7

1. Найдите НОД следующих многочленов. **а)** x^2-2 и x^4+x+5; **б)** $x^4+6x^3-x^2-24x+16$ и $2x^3+9x^2-x-12$; **в)** $x^5-2x^3+7x^2+4$ и x^6-2x+3; **г)** x^3+x^2+x+1 и $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$; **д)** $x^k+x^{k-1}+\ldots+x+1$ и $x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1$.

2. Найдите дискриминант следующих многочленов. **а)** ax^2+bx+c; **б)** x^3+px+q; **в)** x^4-3x^3+4x; **г)** $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

3. Докажите, что все неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ имеют вид $x-a$ или $(x-a)^2+b^2$, где $a,b\in\mathbb{R}$.

Кольцо *гауссовых чисел* $\mathbb{Z}[i]$ состоит из комплексных чисел вида $a+bi$, где $a,b\in\mathbb{Z}$. *Нормой* гауссова числа $z=a+bi$ называется число $\sqrt{a^2+b^2}$. *Сопряженным* к гауссовому числу $z=a+bi$ называется гауссово число $\overline{z}=a-bi$.

4. **а)** Докажите, что гауссовы числа действительно образуют кольцо, т.е. замкнуты относительно операций сложения и умножения комплексных чисел. Проверьте, что сопряжение есть автоморфизм этого кольца. **б)** Докажите, что $|z|^2=z\overline{z}$, $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ и $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$. **в)** Найдите все обратимые гауссовы числа (т.е. такие $z\in\mathbb{Z}[i]$, для которых $z^{-1}\in\mathbb{Z}[i]$).

5. **а)** Пусть $z=1+2i$. Отметьте на плоскости числа вида mz, где $m\in\mathbb{Z}[i]$. **б)** Докажите, что для любых гауссовых чисел $z_1,z_2\in\mathbb{Z}[i]$ и $z_2\ne0$ существуют такие $m,q\in\mathbb{Z}[i]$, что $z_1=mz_2+q$ и $|q|<|z_2|$.

6. **а)** Докажите, что в кольце гауссовых чисел любой идеал главный. **б)** Докажите, что любое гауссово число представляется в виде произведения простых единственным способом (с точностью до обратимых множителей).

7*. **а)** Докажите, что что простое $p\in\mathbb{Z}$ является простым в кольце $\mathbb{Z}[i]$ если и только если уравнение $x^2+y^2=0 \pmod{p}$ не имеет ненулевых решений. **б)** Докажите, что простое $p\in\mathbb{Z}$ является простым в кольце $\mathbb{Z}[i]$ если и только если p имеет вид $4k+3$. **в)** Докажите, что любое другое простое $p\in\mathbb{Z}$ есть произведение 2 простых элементов кольца $\mathbb{Z}[i]$, сопряженных друг другу. **г)** Найдите количество целочисленных решений уравнения $x^2+y^2=n$ в зависимости от $n\in\mathbb{Z}$.

8*. **а)** Решите задачи 4–6 для кольца $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. **б)** Докажите, в кольце $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ не выполняется основная теорема арифметики (а, следовательно, существуют неглавные идеалы и нет деления с остатком).