Алгебра 1 семестр, занятие 8

Кольцо $K[[x]]$ *формальных степенных рядов* над полем K состоит из (бесконечных) сумм вида $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, где $a_i \in K$. Кольцо $K((x))$ *формальных рядов Лорана* над полем K состоит из (бесконечных) сумм вида $a_{-N}x^{-N} + a_{-N+1}x^{-N+1} + a_{-N+2}x^{-N+2} + \ldots$, где $a_i \in K$, а N – произвольное натуральное число. Сложение и умножение в этих кольцах определяются так же, как и для многочленов (т.е., чтобы перемножить два ряда, надо раскрыть скобки, пользуясь соотношением $x^k x^l = x^{k+l}$).

1. а)Выразите явной формулой коэффициенты произведения двух степенных рядов через коэффициенты сомножителей. Тот же вопрос для рядов Лорана. **б)** Найдите все обратимые элементы в $K[[x]]$. **в)** Опишите все идеалы в $K[[x]]$. **г)** Покажите, что $K((x))$ – поле. **д)** Покажите, что $K((x))$ является полем частных кольца $K[[x]]$.

2. а) Покажите, что следующее подмножество поля $\mathbb{C}(x,y)$ является подполем:

$$\{\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \mid P, Q - \text{однородные многочлены равной степени}\}.$$

б) Докажите, что это подполе изоморфно $\mathbb{C}(x)$.

3. а) Покажите, что кольцо $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ не имеет делителей нуля. **б)** Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ не изоморфно $\mathbb{C}[x]$, но его поле частных изоморфно $\mathbb{C}(x)$ (*указание:* синус и косинус рационально выражаются через тангенс половинного угла).

4. При каких n следующие многочлены неприводимы над полем $\mathbb{Q}$? **а)** $x^n - 2$; **б)** $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$; **в)** $x^{2n} + 1$; **г)** $x^{2n} + x^n + 1$.

Многочлен $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется *симметрическим*, если $F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой перестановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Многочлен $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется *кососимметрическим* (или *антисимметрическим*), если $F(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{sign}(\sigma)F(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой перестановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

5. а) Докажите, что многочлен $V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$ кососимметричен; **б)** Докажите, что любой кососимметрический многочлен имеет вид $F(x_1, \ldots, x_n)V(x_1, \ldots, x_n)$, где $F(x_1, \ldots, x_n)$ – симметрический многочлен; **в)** найдите

$$\frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \ldots & x_n^{n+1} \end{pmatrix}}{V(x_1, \ldots, x_n)};$$

г) найдите обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

6. Докажите, что кольцо $C([0,1])$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с поточечным сложением и умножением не нетерово.

7. Укажите какой-нибудь базис в идеале I в кольце $\mathbb{C}[x,y,z]$, где I состоит из многочленов, обращающихся в нуль на **а)** объединении трех координатных плоскостей; **б)** объединении трех координатных прямых.