Алгебра 1 семестр 10 занятие.

Рассматриваются модули над коммутативным и ассоциативным кольцом A

1. Для элемента m модуля M рассмотрим множество $\mathrm{Ann}(m)$ элементов a кольца A переводящих m в ноль: $am = 0$. Докажите что это множество является идеалом.

2. Модуль называется циклическим, если он порождается каким-нибудь одним элементом. Докажите что модуль цикличен титтк он изоморфен фактору кольца по идеалу.

3. Докажите что если числа m и n взаимно просты то модуль $\mathbb{Z}/(mn) = \mathbb{Z}/(m) \oplus \mathbb{Z}/(n)$.(Это верно и для колец)

4.Докажите что если многочлены f и g взаимно просты то модуль $k[x]/(fg) = k[x]/(f) \oplus k[x]/(g)$.

Немного абелевых групп.

Пусть A абелева группа а B – ее подгруппа. Смежным классом называется подмножество A вида aB для какого-нибудь $a \in A$.

5. Определите структуру абелевой группы на множестве смежных классов.

Порядком конечной группы называется ее мощность.

6. Докажите что порядок группы делит порядок подгруппы.

7. Порядком элемента f называется наименьшее натуральное n такое что $na = 0$. Докажите что порядок группы делит порядок любого ее элемента.

Группа называется циклической если она порждена одним элементом.

8. Группа циклическая титтк она является циклическим $\mathbb{Z}$-модулем.

9. Конечная абелва группа является прямой суммой циклических. Что однозначно в таком разложении?