Алгебра 1 семестр 11 занятие.

Следом $\mathrm{sp}(M)$ квадратной матрицы M называется сумма диагональных элементов $\sum m_{ii}$.

1. Докажите что $\mathrm{sp}(M_1 M_2) = \mathrm{sp}(M_2 M_1)$.

2. Найдите предстарший коэффициент характеристического многочлена $\det(\lambda - M)$.

3. Докажите двумя способами, что след определен для оператора.

4. Пусть A_i – линейный оператор на V_i, $i = 1, 2$. Докажите что эти оераторы определяют линейный оператор $A_1 \otimes A_2$ на $V_1 \otimes V_2$.

5. Подсчитайте след и определитель тензорного произведения.

Экспонентой $\exp(M)$ комплексной квадратной матрицы M называется сумма ряда $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^j}{j!}$. Упражнение по анализу: этот ряд сходится для всех матриц.

6. Пусть $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$. Тогда $\exp(M) = \begin{pmatrix} \exp(M_1) & 0 \\ 0 & \exp(M_2) \end{pmatrix}$.

7. Найдите

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & & \lambda \end{pmatrix}$$

8. Найдите

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

9. Чему равно

$$\frac{d \exp(tM)}{dt}?$$

(матрицы дифференцируют покомпонентно).

10. Докажите что $\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{tr}(M))$